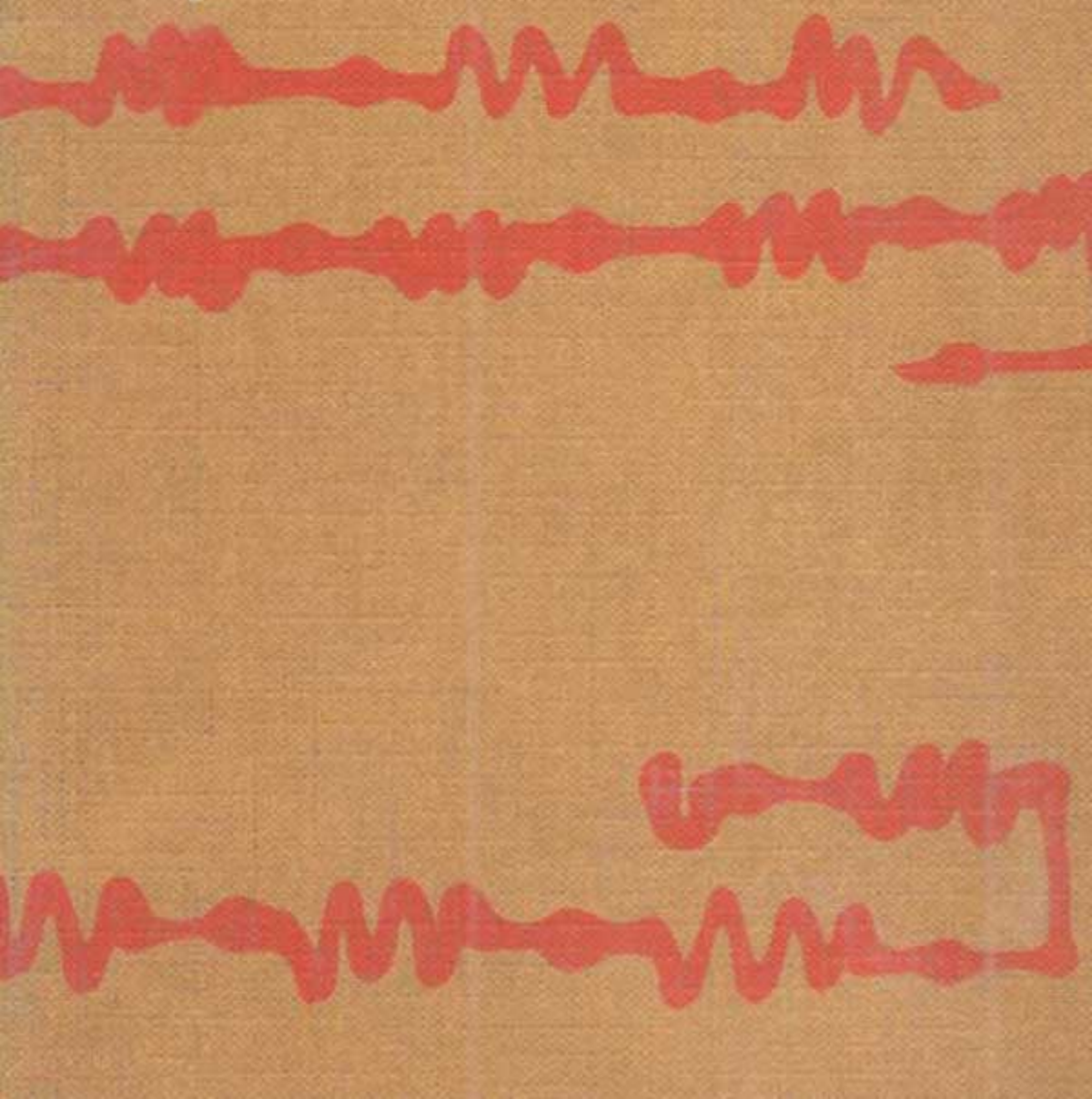
Fundamentos de Electricidad y Magnetismo

Kip



Fundamentos de Electricidad y Magnetismo

ARTHUR F. KIP

Profesor de Física, University of California, Berkeley

Fundamentos de Electricidad y Magnetismo

TRADUCCION Y ADAPTACION

JOSÉ L. LLORET SEBASTIÁN

Catedrático de la Universidad de Salamanca

EDICIONES DEL CASTILLO, S. A.

Marqués de Monteagudo, 16 - Madrid-28

FUNDAMENTOS DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO

Copyright © 1967 por Ediciones del Castillo, S. A., Madrid. Reservados todos los derechos. Queda terminantemente prohibido reproducir este libro total o parcialmente sin permiso expreso de los editores.
Edición original en inglés publicada en los Estados Unidos de América. Copyright © 1962 por McGraw-Hill, Inc. Reservados todos los derechos. Es propiedad.

ISBN 84-219-0045-5
Depósito legal: M. 27.140-1974
Impreso en España - Printed in Spain
Fotocomposición, Compoprint, Marqués de Monteagudo, 16, Madrid.
Gráficas E.M.A., Miguel Yuste, 31, Madrid.

Prólogo

El presente libro constituye un primer curso sobre las teorías eléctricas y magnéticas clásicas. En un curso de este tipo debe mantenerse siempre un compromiso entre la necesidad de presentar los fenómenos de electricidad y magnetismo, y el deseo de mostrar la notable unidad que presenta la teoría electromagnética, a un nivel adecuado a la experiencia de los estudiantes que comienzan su estudio. Este compromiso se ha conseguido con la experiencia obtenida con alumnos de segundos cursos de física, ingeniería y química en el Massachusetts Institute of Technology y en la Universidad de California.

Se han relacionado las leyes básicas con las observaciones experimentales, y, en general, toda la exposición teórica está conectada con los fenómenos experimentales en muchos puntos. Se ha hecho un gran esfuerzo, por la parte teórica, para mostrar la notable economía que se consigue al emplear las ecuaciones de Maxwell en la descripción de los fenómenos básicos del electromagnetismo.

Al desarrollar la materia de este curso se ha supuesto que solo se poseen conocimientos elementales de cálculo y vectores. Los conceptos más complicados que se consideran necesarios, se introducen

a lo largo del libro. Al tratar de los campos escalares y vectoriales, se incluyen los conceptos de integrales de línea y de superficie y de los productos escalar y vectorial. En secciones especiales de los primeros capítulos se insiste en la relación entre los problemas físicos y su descripción matemática. Se exponen numerosos ejemplos, tanto en el cuerpo del texto como en los problemas seleccionados que figuran al final de cada capítulo, para ayudar al alumno a adquirir experiencia en aplicar las técnicas matemáticas a problemas físicos.

Como la mayoría de los estudiantes que comienzan este curso lo hacen con ideas algo nebulosas sobre los fenómenos eléctricos, salvo los más simples, se presentan ejemplos prácticos a lo largo de todo este libro. Sin embargo, puesto que se trata de un curso de física y no de ingeniería, los dispositivos prácticos se estudian únicamente en la extensión en que contribuyan a aclarar los principios básicos. En el Cap. 13 se hace un estudio elemental sobre la aplicación de la teoría electromagnética al problema de la descarga eléctrica en gases, y algunos problemas sencillos de la magnetohidrodinámica.

En dos aspectos se ha sobrepasado en este libro el propósito fundamental de mostrar la teoría electromagnética clásica. El primero, es la inclusión de algunos de los conceptos esenciales de la física del estado sólido, puesto que con ellos es posible introducir el estudio de fenómenos eléctricos tan fundamentales como la conductividad en metales y semiconductores. Las propiedades eléctricas y magnéticas de la materia se tratan con el detalle suficiente para preparar el camino a un curso más avanzado sobre el estado sólido. El segundo aspecto, es la introducción, por medio de algunos temas seleccionados, de algunos de los fenómenos que ilustran el impacto de la mecánica cuántica sobre la electricidad y el magnétismo clásicos. A este nivel en modo alguno puede ser completo el tratamiento de estos temas, pero, en ambos casos, el estudiante queda preparado para apreciar en su valor los conceptos básicos.

En lugares apropiados del texto se incluyen algunas citas tomadas de trabajos originales de Coulomb, Ampere, Faraday y Maxwell, con el fin de dar una impresión sobre la evolución histórica del tema.

A lo largo del libro se emplean unidades mks racionalizadas, pero en el Cap. 15 se establece la relación entre estas unidades y las de los sistemas cgs e. e. y e. m. Es evidente que en un curso de introducción a la electricidad debe emplearse un solo sistema de unidades, aunque también es cierto que la mayoría de los estudiantes, tarde o temprano tendrán que familiarizarse con los otros sistemas.

El autor desea expresar su gratitud al Prof. Alan M. Portis por sus numerosas sugerencias y críticas valiosas durante la preparación de este libro.

También desea expresar su profundo agradecimiento a los alumnos de varios cursos, cuya reacción a ediciones preliminares de esta obra condujeron a muchas mejoras en la forma de presentar el tema.

ARTHUR F. KIP

Prólogo del traductor

Nos hemos dado cuenta al traducir el prólogo del autor, y más aún, la introducción que el profesor E. U. Condon ha preparado para este libro, que al mantener con la máxima fidelidad posible las ideas allí expuestas, surgía la necesidad de unas breves notas que, a modo de introducción a la edición castellana, puedan servir de orientación al lector la primera vez que este libro caiga en sus manos.

Hacemos nuestras las inquietudes que mueven a conseguir una mejor y más actualizada enseñanza de la Física, tanto en los estudios de grado medio como en los de enseñanza superior y universitaria. La labor de los alumnos ante la modernización de los programas de enseñanza, puede verse grandemente facilitada al disponer de textos en los que se adopte ese punto de vista moderno, que la rápida evolución de la Física exige.

Las referencias que hacen el autor y el profesor Condon al sistema educativo norteamericano—de organización diferente al nuestro en tantos aspectos—para situar el nivel y campo de aplicación del libro pueden quedar, en muchos casos, vacías de significado para el lector no informado sobre los planes de estudios en aquella nación.

Se trata de un texto de Electricidad y Magnetismo desarrollado a un nivel adecuado para los cursos intermedios de una licenciatura de ciencias. Para los estudiantes de una Sección de Físicas puede proporcionar la base sólida necesaria para abordar en los cursos finales de la carrera un estudio más completo de la Electricidad, en el que probablemente se analizarán con mayor detalle los aspectos físico-matemáticos, que en este texto han tenido que verse forzosamente reducidos a presentar los casos más simples. En nuestra opinión, con muy pocas variantes, puede cubrir lo que ha venido a llamarse Física III, en el último plan de estudios.

Para los alumnos de otras secciones de las Facultades de Ciencias, al igual que para los de las Escuelas Técnicas Superiores en que se incluya un curso de Electricidad General, previo a las asignaturas de tipo aplicado, puede dar una visión de la Electricidad, con rigor suficiente y sin complejidad excesiva. Presentada además, con ese espíritu moderno a que antes nos referíamos, que comprende los conocimientos básicos en los que, para completar su formación, pueden estar más interesados estos estudiantes que no han escogido la Física como profesión, pero que necesitan aplicarla constantemente en sus respectivos campos de actividad.

Esperemos, pues, sinceramente una favorable acogida para este texto en todos los países de habla española.

Salamanca, mayo de 1966.

JOSE L. LLORET

Tabla de materias

Prólogo 5
Introducción 17

1. Carga eléctrica, ley de Coulomb de las fuerzas electrostáticas 21

1.1 Introducción, 21
1.2 Carga eléctrica, ley de Coulomb, 22
1.3 Ejemplos, 29
1.4 Carga eléctrica y materia, 32
1.5 Aparatos electrostáticos, 33

2. El campo eléctrico 37

2.1 Introducción, 37
2.2 El campo eléctrico, 37
2.3 Ejemplos, cálculo de campos eléctricos, 40
2.4 Conductores y campos eléctricos, 46
2.5 Líneas de fuerza, 46
2.6 Teorema de Gauss, 50
2.7 Ejemplos, aplicaciones del teorema de Gauss, 54

3. *El potencial eléctrico* 64

3.1 Introducción, 64
3.2 Integral de línea, trabajo, 64
3.3 Energía potencial, 68
3.4 Diferencia de potencial y potencial, 68
3.5 Ejemplos, cálculo de potenciales, 70
3.6 Relación entre potencial y campo eléctrico, 72
3.7 Ejemplos, cálculo de campos mediante el potencial, 74
3.8 Ecuaciones de Poisson y Laplace, 76
3.9 Determinación de la carga del electrón, 76
3.10 El electrón-voltio, 77

4. *Capacidad* 82

4.1 Introducción, 82
4.2 El condensador, 83
4.3 Ejemplos, cálculo de capacidades, 85
4.4 Asociaciones de condensadores, 87
4.5 Energía almacenada en los condensadores, 88
4.6 Autoenergía de las cargas eléctricas, 91
4.7 Fuerza entre las placas de un condensador, 91
4.8 Solución de los problemas de potencial, generalidades, 92
4.9 Aparatos electrostáticos, 92

5. *Dieléctricos* 97

5.1 Introducción, 97
5.2 Polarización de la materia, 98
5.3 Cargas de polarización y momento dipolar por unidad de volumen, 101
5.4 El desplazamiento eléctrico **D**, *106*
5.5 Ejemplos, 109
5.6 Condiciones en la superficie límite entre dos dieléctricos, 110
5.7 Fuerza entre dos cargas situadas en un medio dieléctrico, 113
5.8 Energía almacenada en un medio dieléctrico, 114
5.9 Factor despolarizante, 117
5.10 Polarizabilidad atómica, 119
5.11 Materiales ferroeléctricos, 122

6 *El campo magnético* 126

6.1 Introducción, 126
6.2 Fuerza magnética entre dos elementos de corriente, 127

6.3 Ejemplos, 134
6.4 Propiedades del campo de inducción magnética, 138
6.5 Flujo de inducción magnética, 142
6.6 Cálculo de algunos campos, 142
6.7 Par sobre una espira situada en un campo magnético uniforme. Dipolo magnético, 144
6.8 Fuerza sobre cargas aisladas en movimiento, 147
6.9 Aplicaciones, 150

7. Circuitos eléctricos, intensidad de la corriente y resistencia 159

7.1 Introducción, 159
7.2 Corriente eléctrica, 159
7.3 Resistencia, ley de Ohm, 161
7.4 Disipación de energía en una resistencia, 168
7.5 Fuerza electromotriz, resistencia interna, 169
7.6 Circuitos, leyes de Kirchhoff, 172
7.7 Medida de tensiones e intensidades, el galvanómetro, 176
7.8 El potenciómetro, 180
7.9 Puente de Wheatstone, 181
7.10 Variación de la resistividad de los metales, 182
7.11 Fuerza electromotriz de una pila, 185
7.12 Potencial de contacto y fuerzas electromotrices térmicas, 187

8. Fuerza electromotriz inducida, autoinducción 195

8.1 Introducción, 195
8.2 Fuerza electromotriz debida al movimiento, 195
8.3 Ley de inducción de Faraday, 197
8.4 Ley de Lenz, 199
8.5 Ejemplos, 201
8.6 Inductancia mutua, 204
8.7 Autoinducción, 206
8.8 Ejemplos, 207
8.9 Cálculo de la inductancia mutua, 212
8.10 Combinaciones de bobinas, 214
8.11 Energía magnética, 215
8.12 Otros aspectos de la ley de Faraday, 218
8.13 Aplicaciones, 219

9. El magnetismo en los medios materiales 229

9.1 Introducción, 229
9.2 Contribución de la materia al magnetismo, 230

9.3 Intensidad del campo magnético **H**, *234*
9.4 Parámetros magnéticos de la materia, 235
9.5 Características de los campos **B** *y* **H**, *236*
9.6 Condiciones en los límites para **B** *y* **H**, *238*
9.7 Energía almacenada en los medios magnéticos, 240
9.8 Paramagnetismo, 241
9.9 Diamagnetismo, 245
9.10 Ferromagnetismo, 249
9.11 Pérdidas por histéresis en los materiales magnéticos, 254
9.12 Cuerpos magnetizados, 256
9.13 Imanes permanentes, 262
9.14 Ejemplos, 265
9.15 Circuitos magnéticos, 268

10. Circuitos de corriente alterna 275

10.1 Introducción, 275
10.2 Tensiones sinusoidales, 276
10.3 Relaciones entre tensión e intensidad, 278
10.4 Circuito RLC serie, 282
10.5 Circuito RLC paralelo, 287
10.6 Resonancia, 289
10.7 Transitorios, 290
10.8 Filtros eléctricos, 294
10.9 Potencia en los circuitos de corriente alterna, 296
10.10 Instrumentos de corriente alterna, 299
10.11 El transformador, 301
10.12 Generadores, 304
10.13 Motores, 306

11. Electrónica 313

11.1 Introducción, 313
11.2 La válvula de vacío, 314
11.3 Transistores, 319
11.4 El klinstrón, 326

12. Las ecuaciones de Maxwell y las ondas electromagnéticas 329

12.1 Introducción, 329
12.2 La teoría general del electromagnetismo, 329
12.3 La corriente de desplazamiento, 331
12.4 La física y matemáticas de las ondas, 334

12.5 Ondas electromagnéticas, 338
12.6 Naturaleza transversal de las ondas planas, 342
12.7 Propagación de la energía, el vector de Poynting, 343
12.8 Ejemplo de cálculo del vector de Poynting, 346
12.9 Generación de ondas electromagnéticas, 347
12.10 Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas en la superficie de límite entre dos dieléctricos, 349
12.11 Ondas electromagnéticas en guías, 352

13. Conducción de la electricidad en los gases y magnetohidrodinámica 358

13.1 Introducción, 358
13.2 Procesos en campos débiles, 359
13.3 Procesos en campos intensos, ionización por choque, 361
13.4 La descarga luminosa, 365
13.5 La descarga en corona, 365
13.6 La descarga en arco, 366
13.7 Movimiento de partículas en un campo magnético, 366
13.8 Ondas magnetohidrodinámicas, 374
13.9 Movimiento de un fluido conductor en un campo magnético, 376

14. Fenómenos eléctricos y magnéticos de naturaleza cuántica 378

14.1 Introducción, 378
14.2 El efecto fotoeléctrico, 379
14.3 La radiación emitida por los átomos, 382
14.4 Rayos X y rayos γ, 382
14.5 Efecto Compton, 384
14.6 Ondas electrónicas, 384
14.7 Cuantización magnética, el experimento de Stern y Gerlach, 385

15. Unidades de medida 388

15.1 Introducción, 388
15.2 El sistema electrostático absoluto de unidades (cgs e. e.), 389
15.3 El sistema electromagnético absoluto de unidades (cgs e. m.), 393
15.4 Combinación de las unidades cgs e. e. y e. m., 394
15.5 Tabla de conversión, 395

Apéndice A Ecuaciones de Poisson y Laplace 397
Apéndice B Esfera conductora en un campo uniforme 400
Apéndice C Esfera dieléctrica en un campo uniforme 403
Apéndice D Números complejos 407
Apéndice E Efecto de los procesos primario y secundario de multiplicación sobre la conductividad eléctrica de los gases 410
Algunas de las constantes físicas fundamentales 413
Soluciones a los problemas con numeración impar 415
Indice alfabético 419

Introducción

Con el gran desarrollo que ha tenido lugar durante los últimos treinta años en las ciencias físicas, se ha presentado la necesidad de una revisión fundamental en la forma en que el tema se presenta en colegios y universidades. A pesar de la limitación que en el tiempo total disponible existe en un *curriculum* de cuatro años para obtener el grado de bachiller (bachelor) en artes liberales y en ingeniería, va aumentando el convencimiento de que la física fundamental exige dos años, o como mínimo tres semestres, para una presentación que sea adecuada a las necesidades de los que van a trabajar en cualquier campo de la ciencia, medicina o ingeniería. Es de esperar que, muy pronto, ese curso de un año, casi sin cálculo matemático, que ha sido considerado durante mucho tiempo como suficiente para estudiantes de artes liberales y medicina, sea cosa del pasado.

Hasta hace poco, los que sentían el deseo de desarrollar la física en forma nueva y moderna se encontraban limitados en lo que podían emprender, por la calidad, generalmente baja, de la enseñanza en ciencias básicas y matemáticas que se ofrecía en la mayor

parte de las escuelas de tipo medio. Sin embargo, este obstáculo está desapareciendo rápidamente, gracias al esfuerzo intensivo que ha conducido a la preparación, en estas escuelas, de un curso de física de mucha mejor estructura, a través de los grandes esfuerzos del Comité para el estudio de la Física y otras personas; gracias a un desarrollo análogo para mejorar los cursos en matemáticas, química y biología; gracias al programa patrocinado en gran escala por la Fundación Nacional de Ciencias, de cursillos especiales durante el curso académico y de verano, para mejorar los conocimientos de los profesores de estas escuelas sobre lo que ellos enseñan; y gracias al desarrollo de planes organizados para la mejora de la enseñanza de ciencias y matemáticas a nivel de los colegios, también patrocinado por la Fundación Nacional de Ciencias.

Hace treinta años, y aún más recientemente, existía una profunda separación entre los físicos, entre los que estaban interesados principalmente en la investigación (que eran con bastante frecuencia de una negligencia deplorable en sus enseñanzas) y los interesados principalmente en la enseñanza (que eran demasiado frecuentemente de una negligencia, también deplorable, para mantenerse informados de los progresos recientes). Afortunadamente, todo esto está cambiando en la actualidad. Destacados físicos investigadores dedican su atención a mejorar la enseñanza y muchos profesores de colegios están adquiriendo un interés mucho más activo en el continuo progreso de la investigación que se realiza en el momento presente.

Estas nuevas tendencias, que aún están ganando ímpetu, deben reflejarse en los enfoques nuevos de los libros de texto. El presente volumen sobre electricidad y magnetismo del Prof. Arthur Kip, de la Universidad de Berkeley (California), es el primero de una serie de cuatro planeados en forma unitaria para conseguir una presentación moderna de la física adecuada para los hombres y mujeres que esperan tener un papel efectivo, posiblemente como científicos o ingenieros, en un mundo en que tan importante está resultando un conocimiento genuino de los principios y métodos de la física. Es de esperar que este libro sea empleado en el segundo, de una serie de tres o cuatro semestres, después de un curso en que se haya cubierto la mecánica, el calor y la teoría cinética de la materia, que serán presentados en otro volumen de esta serie. Como continuación de este volumen hay otros dos: uno planeado para un semestre sobre óptica y movimiento ondulatorio, y el otro planeado para un nuevo semestre sobre física atómica y nuclear.

Consecuentes con la mejor situación que ahora existe en cuanto a conocimientos matemáticos, estos libros hacen uso de los conceptos básicos del cálculo diferencial e integral y también de los méto-

dos vectoriales cuando son necesarios. Igualmente de acuerdo con el hecho de que la mayoría de los estudiantes probablemente no han profundizado en estos temas, se hace un uso mínimo de las mañas y trucos para obtener resultados especiales por tales métodos. En vez de ello, se insiste en desarrollar un buen conocimiento físico de los conceptos de la física y de las bases experimentales subyacentes que determinan el aceptarlos, el rechazarlos, o el modificarlos.

Se espera sinceramente que esta serie constituya una contribución original para ayudar a los profesores a dar a sus alumnos el tipo de enseñanza clara de lo que la física realmente es, de lo que tanta necesidad hay para la vida en el mundo de hoy.

E. U. CONDON

Jefe del Departamento de Física
y Profesor Wayman Crow de Física
Universidad de Wáshington
San Luis, Missouri

UNO

Carga Eléctrica, Ley de Coulomb de las Fuerzas Electrostáticas

1.1 Introducción

La investigación a fondo del comportamiento de las *cargas eléctricas* (o *cargas electrostáticas)* nos conduciría a la teoría completa del electromagnetismo. Aunque, como veremos, la teoría tiende actualmente a dar mayor énfasis a ciertas magnitudes abstractas como campos eléctricos, potencial y líneas de fuerza; la base de todas nuestras ideas sobre electromagnetismo reside en la existencia de las cargas eléctricas.

En nuestro estudio de estas cargas, comenzaremos por los hechos experimentales más sencillos y, paso a paso, veremos cómo ha surgido el presente cuerpo de ideas y métodos teóricos. Por simplicidad, consideramos primero la situación idealizada que se presentaría si las cargas estuvieran en el vacío. Más tarde, estudiaremos los efectos perturbadores, normalmente pequeños, que la presencia de aire u otra sustancia introduce en estos primeros resultados. En la primera parte nos limitaremos al estudio de cargas en reposo, y solo mucho más adelante consideraremos los efectos de cargas en movimiento, es decir, de las corrientes. Al estudiar las fuerzas entre

corrientes estableceremos la relación con los fenómenos de magnetismo, y, finalmente, demostraremos que la propagación de energía por ondas electromagnéticas, como, por ejemplo, la luz y las ondas de radio, puede explicarse tomando como base los fenómenos anteriormente estudiados.

El conocimiento de la existencia de cargas electrostáticas se remonta a la época de la antigua Grecia, alrededor de 600 años antes de Cristo. Podemos repetir las experiencias de los griegos frotando una barra de ámbar o ebonita con un trozo de piel, y observar después cómo la barra es capaz de atraer trocitos de papel y otros materiales ligeros. No se realizó ningún progreso notable en la interpretación de este fenómeno hasta los alrededores de 1600, cuando William Gilbert, médico de la reina Isabel de Inglaterra, comenzó un estudio detallado de las distintas clases de sustancias que se comportaban como el ámbar. Describió tales materiales como *eléctricos* (del nombre griego del ámbar, *elektron)*. Gilbert llamó *no-eléctricos* a los materiales en los que fue incapaz de encontrar esta fuerza atractiva. Ahora llamamos a estas dos clases de sustancias *aislantes* y *conductores.*

La siguiente etapa de importancia en el desarrollo de las ideas sobre cargas vino unos 100 años más tarde. Du Fay demostró que existían dos tipos de electrificación. Frotando entre sí aislantes de varias clases, pudo comprobar que en ciertas condiciones se repelían unos a otros. Sus resultados podían explicarse postulando la existencia de dos clases de cargas. Las fuerzas entre cuerpos que tienen cargas de igual clase resultan ser repulsivas, mientras que las fuerzas entre cargas desiguales son atractivas. Para los cálculos se atribuye a un tipo de carga el signo positivo y el signo negativo al otro, como fue sugerido por primera vez por Benjamín Franklin. Es arbitrario (y sin importancia) qué signo se elige para un tipo dado de carga, pero, como veremos, el establecer un convenio de signos nos permitirá introducir una formulación matemática muy concisa para los hechos experimentales.

Vamos ya a dejar la discusión cualitativa sobre la carga eléctrica y empezar su estudio en forma cuantitativa.

1.2 Carga eléctrica. Ley de Coulomb

Es notable que todos los fenómenos sencillos en que intervienen cargas eléctricas en reposo puedan ser descritos muy bien por la ecuación

$$\mathbf{F} \propto \sum_i \frac{q_i q'}{r_i^2} \qquad \textbf{(suma vectorial)} \tag{1.1}$$

Esta es una de las formas de la ley de las fuerzas electrostáticas. Debemos su formulación a los experimentos de Priestley en 1767, que fueron repetidos por Coulomb en 1785. Generalmente se la conoce como ley de Coulomb, y expresa el valor de la fuerza **F** entre las cargas puntuales q' y q_i, separadas por una distancia r_i.

Aunque ésta no sea la descripción más general posible, constituye una expresión razonablemente completa de nuestras ideas sobre cargas. Puesto que, de momento, estamos interesados principalmente en los conceptos físicos referentes a cargas, no vamos a empezar ahora la discusión de la Ec. (1.1). En su lugar, vamos a hacer explícitamente una relación de los hechos de interés sobre las cargas y después comprobaremos cómo la descripción anterior, notablemente concisa, incluye todas las cuestiones de interés relativas a cargas en reposo. En este momento, nuestra descripción se limita al caso de cargas *puntuales:* esto es, consideraremos únicamente cargas que están concentradas en una región cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la distancia a otras cargas.

Aunque no entraremos en detalles en todos los casos, los puntos siguientes están deducidos directa o indirectamente de la experiencia. No solo dan cuenta de los hechos experimentales, sino que precisan también el punto de vista desde el que hoy en día explicamos estos hechos.

1. La presencia de cargas eléctricas se manifiesta por la existencia de fuerzas atractivas o repulsivas entre ellas. Estas fuerzas llegan a ser lo suficientemente grandes para que sea posible realizar medidas cuantitativas en el laboratorio.

2. Hay dos clases de carga eléctrica. La fuerza entre cargas *iguales* es *repulsiva* y actúa a lo largo de la línea que las une. Entre cargas desiguales, que se llaman *positiva* y *negativa* (de modo bastante arbitrario), la fuerza es *atractiva* y también actúa a lo largo de la línea que une las cargas.

3. La fuerza entre un par dado de cargas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

4. La fuerza entre dos cargas es proporcional a la *magnitud* de una carga multiplicada por la *magnitud* de la otra.

5. La fuerza entre dos cargas cualesquiera es independiente de la presencia de otras cargas.

Examinemos con detalle ahora estos puntos. El primero queda ilustrado ya por los primeros experimentos de los griegos con ámbar y trocitos de papel u otra sustancia ligera. El punto 2 es algo más elaborado; su prueba experimental exige, en primer lugar, que dispongamos de un método para producir ambas clases de carga a voluntad y, además, que seamos capaces de observar la dirección de la fuerza en los diferentes casos. Describiremos primero un método

para demostrar que cargas iguales se repelen entre sí. Vamos a suponer que frotamos una barra de ámbar o ebonita, con lana o piel de gato. El efecto de esta fricción resulta ser el siguiente: sobre la barra queda un exceso de carga negativa y sobre la lana una cantidad equivalente de carga positiva. Debido a que las cargas iguales se repelen, como demostraremos inmediatamente, el exceso de carga negativa tenderá a escaparse hacia cualquier objeto con el que se toque la barra. Por tanto, si tocamos con ella una bolita de papel o de otra sustancia, suspendida mediante un hilo aislante (para evitar que se escape la carga), parte de la carga de la barra pasará a la bola. Podemos después repetir el experimento con otra bolita de papel, de modo que ahora tenemos dos bolas con la misma clase de carga, y puede llevarse a cabo el primer experimento crucial. La cuestión es si las dos bolas se atraen o se repelen mutuamente, y de hecho encontramos que se repelen.

Si se realiza ahora un experimento exactamente similar, pero esta vez empleando una barra de vidrio frotada con seda para conseguir bolitas cargadas positivamente, encontraremos de nuevo fuerzas repulsivas entre las cargas. El experimento final consistirá en el empleo de una bolita cargada con la barra de ámbar y otra cargada con la barra de vidrio. En contraste con los casos anteriores, en este experimento encontramos una fuerza atractiva. Evidentemente, serían necesarios experimentos adicionales para demostrar la reproducibilidad de los efectos y que todas las cargas pueden clasificarse en una u otra categoría; sin embargo, los experimentos anteriores son los cruciales para determinar el signo de las fuerzas, así como para comprobar que actúan a lo largo de la línea que une las cargas.

Los puntos 3 y 4 son los primeros que exigen para su verificación medidas cuantitativas. A continuación, veremos un posible camino, aunque quizá no muy práctico, de confirmar el

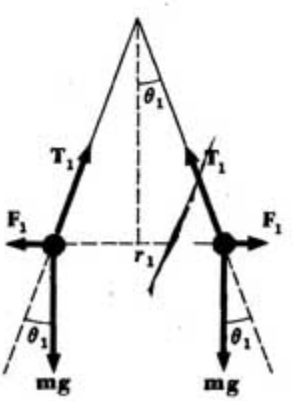


Fig. 1.1 Dispositivo para medir la fuerza de repulsión entre dos bolas igualmente cargadas.

punto 3. Más adelante se dará un argumento mucho más satisfactorio.

Demostración de la validez de la ley de repulsión entre cargas iguales. Supongamos que tenemos cargas de igual signo y magnitud sobre dos bolas de la misma masa, suspendidas por medio de hilos aislantes, de masa despreciable, como se indica en la Fig. 1.1. No es imprescindible el requisito de igualdad de masas y cargas, pero se hace para simplificar los cálculos. Puesto que la resultante de la fuerza electrostática, **F**, y la fuerza de gravitación **mg**, debe ser igual y opuesta a la tensión del hilo **T**.

$$\frac{F_1}{mg} = \text{tg } \theta_1$$

Si acortamos los hilos de suspensión, el sistema toma una nueva posición de equilibrio, con un nuevo ángulo θ_2. La nueva fuerza repulsiva de origen electrostático vendrá dada por $F_2/mg = \text{tg } \theta_2$. Por tanto, si se miden θ_1 y θ_2, obtendremos la relación F_1/F_2, puesto que **mg** no cambia. Si medimos también las separaciones respectivas entre las cargas, r_1 y r_2, podemos relacionar la razón de fuerzas y la razón de distancias. Experimentalmente encontraremos que $\frac{F_1}{F_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$. Este resultado está de acuerdo naturalmente con el punto 3, es decir, que

$$F \propto \frac{1}{r^2} \tag{1.2}$$

Resulta de interés citar brevemente de los trabajos originales de Coulomb[1] parte de su descripción de las medidas cuantitativas de la ley de las fuerzas entre partículas cargadas. Coulomb había encontrado las leyes de torsión de los hilos, tras de lo cual aplicó el método de torsión a la investigación de las fuerzas electrostáticas. Su balanza de torsión estaba dispuesta de modo que la fuerza entre dos cuerpos cargados se traducía en la torsión de un delgado hilo de suspensión. Había comparado así el grado de torsión para diferentes distancias entre los cuerpos cargados, y de ello fue capaz de deducir la ley de proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia:

> En una memoria presentada a la Academia en 1784, determiné experimentalmente las leyes de la fuerza de torsión de un hilo metálico...

[1] Charles Augustin de Coulomb, Memoires sur l'electricité et le magnétisme, *Mem. Acad. Roy. Sci.*, págs. 569 y siguientes (1788). La cita es del volumen de 1785, publicado en 1788. ¡También había retrasos en las publicaciones en aquellos tiempos!

Demostré en la misma memoria que empleando esta fuerza de torsión era posible medir con precisión fuerzas muy pequeñas, como, por ejemplo, una diezmilésima de grano...

Someto hoy a la Academia una balanza eléctrica construida según el mismo principio; esta balanza mide muy exactamente la fuerza eléctrica de un cuerpo, aun cargado muy ligeramente...

... a continuación vamos a dar el método que hemos empleado para determinar la ley fundamental según la cual los cuerpos electrizados se repelen unos a otros.

En el tercer ensayo el hilo de suspensión se retorció 567 grados y las dos bolas estaban separadas únicamente por 8 grados y medio. La torsión total fue, por tanto, 576 grados, cuatro veces la del segundo ensayo, y a la distancia entre las dos bolas, en este tercer ensayo, le faltaba solo medio grado para haberse reducido a la mitad de la existente en el segundo ensayo. Resulta de estos tres ensayos que la acción repulsiva que las dos bolas ejercen mutuamente, cuando están electrizadas análogamente, está en razón inversa al cuadrado de las distancias.

El punto 4 combina la ley de interacción entre cargas con la hipótesis de la conservación de la carga eléctrica. Esto es, implica que seamos capaces de saber la cantidad de carga que estamos manejando, ya que entonces podemos relacionar la intensidad de las fuerzas entre cargas con la *magnitud* de las cargas que intervienen. La idea se establece mucho más fácilmente en forma matemática como sigue: Dos cargas situadas a una distancia fija actúan mutuamente de modo que la fuerza ejercida

$$F \propto q_1 q_2$$

donde q_1 y q_2 miden las cantidades de carga respectivas. Podemos pensar en un experimento para la medida de parejas de cargas, por la intensidad de la fuerza ejercida entre ellas a distancias dadas y la subsiguiente combinación de alguna de las cargas tanto para comprobar la aditividad (o conservación) de las cargas, como la ley de fuerzas multiplicativa dada anteriormente. Los resultados experimentales están una vez más de acuerdo con estas dos ideas. La conservación de la carga aquí introducida, incluye los efectos de la existencia de dos clases de carga, y podemos ahora ver la simplificación resultante del empleo de los signos + y − para ellas. La terminología usada está de acuerdo con el hecho de que cantidades iguales de cargas + y − se compensan, mientras que cargas de igual clase se suman. En lo que se refiere a la ley de acción mutua, solo necesitamos hacer un convenio en la ecuación $F \propto q_1 q_2$, el de que una fuerza positiva significa una fuerza de repulsión;

una vez admitido, encontramos que la ecuación da el tipo de fuerzas correcto para cualquier combinación de pares de cargas. No habría cambio en la dirección predicha para las fuerzas si intercambiáramos los nombres atribuidos a las dos clases de carga.

Es posible, ahora, combinar las dos últimas ecuaciones, [(1.2) y (1.3)], en una sola:

$$F \propto \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.4}$$

Ciertamente, es muy satisfactorio que en una ecuación puedan estar contenidas, en forma tan sencilla, tantas ideas. En realidad, hay aún otra idea, que no hemos discutido, pero que está implicada en la terminología matemática. Puesto que una fuerza es una magnitud vectorial, la Ec. (1.4) es una ecuación vectorial. Matemáticamente esta ecuación nos dice que si nos fijamos en una carga, por ejemplo, la q_1, la fuerza sobre ella será la suma vectorial de las fuerzas debidas a cualesquiera otras cargas q_2, q_3, etc., situadas a las distancias r_{12}, r_{13}, etc. Así podremos escribir

$$\mathbf{F} \propto \left(\frac{q_1 q_2}{{r_{12}}^2} + \frac{q_1 q_3}{{r_{13}}^2} + \cdots\right) \text{(suma vectorial)}$$

Físicamente esta idea será correcta únicamente si la fuerza entre dos cargas es independiente de la presencia de cualquier otra carga. Pero es éste exactamente el hecho experimental descrito en el punto 5, de modo que aceptaremos esta formulación matemática como una descripción completa de los hechos experimentales.

Notación vectorial. Es útil introducir también aquí una terminología matemática que ayudará a la descripción de la situación física. Hemos hecho notar que (1.4) es una ecuación vectorial. A fin de indicar que el segundo miembro de la ecuación es también una magnitud vectorial, introduciremos el *vector unitario* $\hat{\mathbf{r}}$, que tiene la dirección del vector (en este caso, la dirección del radio vector $\mathbf{r}$ de q_2 a q_1) y cuyo módulo es la unidad. Así podemos reescribir la Ec. (1.4):

$$\mathbf{F}_1 \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{1.4a}$$

No hay cambio en el significado de la ecuación, pero hemos manifestado explícitamente el carácter vectorial de ambos miembros. Análogamente, la ecuación siguiente a la (1.4) se convierte en

$$\mathbf{F}_1 \propto \left(\frac{q_1 q_2}{{r_{12}}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} + \frac{q_1 q_3}{{r_{13}}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{13} + \cdots\right)$$

En este caso, los vectores unitarios $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ y $\hat{\mathbf{r}}_{13}$ tienen las direcciones de las líneas de q_2 a q_1 y de q_3 a q_1 respectivamente. Esto nos releva de la necesidad de escribir *suma vectorial* tras la ecuación, puesto que la naturaleza vectorial de la suma está contenida en la descripción matemática.[1]

Solo nos queda ahora una tarea más, remplazar el signo de proporcionalidad en la ecuación por el signo más preciso de igualdad. El método usual consiste en escribir la ecuación con un factor de proporcionalidad, que debe ser calculado posteriormente. Así nuestra ecuación

$$\mathbf{F} \propto \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \quad \text{se convierte en} \quad \mathbf{F} = K\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

siendo K el factor de proporcionalidad. El valor de K depende de la elección de unidades para F, r y q. Si las unidades de F y r ya se han adoptado al estudiar la mecánica (por ejemplo, F en Newtons y r en metros en el sistema mks), el valor de K depende solamente de la elección de la unidad de q. En el sistema mks definimos la unidad de q a partir de consideraciones de tipo completamente diferente basadas en la fuerza magnética entre corrientes eléctricas; la unidad se llama *coulomb*. En este caso K resulta una cantidad que ha de ser determinada experimentalmente. Por razones que quedarán aclaradas más adelante, se suele escribir $(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ en lugar de K, de modo que la ecuación queda en la forma

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

En ella, las q se miden en coulombs y ϵ_0, llamada permitividad[2] del vacío, resulta experimentalmente que tiene el valor $8{,}85 \times 10^{-12}$ culomb^2/newton-m^2. Es conveniente recordar la relación equivalente $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9$ newton-m^2/culomb^2. La definición fundamental del culombio procede de los efectos magnéticos sobre cargas en movimiento, que se discutirán en la Sec. 6.4. El culombio es la uni-

[1] Otra forma usual de tratar el carácter vectorial de ecuaciones como la (1.4*a*) es escribirla en la forma

$$\mathbf{F}_1 \propto \frac{q_1 q_2 \mathbf{r}}{r^3}$$

donde $\mathbf{r}$ es ahora un vector cuyo módulo es la distancia r. La r^2 del denominador se ha cambiado a r^3 para compensar, de modo que el sentido de la ecuación es idéntico al de la Ec. (1.4*a*). Nosotros usaremos la notación con vector unitario.

[2] *N. del T.* En los textos en lengua castellana se usa más el nombre de constante dieléctrica del vacío; sin embargo, va introduciéndose el nombre permitividad para evitar el empleo de la palabra constante cuando su valor cambia de unos medios materiales a otros.

dad de carga tanto en el sistema mks como en el sistema *práctico* (véase Cap. 15).

Para la fuerza sobre q_1 debida a un cierto número de cargas, podemos escribir

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_1 q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \tag{1.6}$$

que es equivalente a la Ec. (1.1). La comprensión verdadera de esta ecuación proporciona una visión de gran parte de la física sobre concepto de cargas y fuerzas que actúan entre ellas.

Una ligera modificación nos permite tratar los casos en que la carga está distribuida en una región, en lugar de estar concentrada en puntos determinados. Supongamos que tenemos una carga puntual q_1, que está próxima a una región con distribución continua de carga, tal como se indica en la Fig. 1.2, y queremos calcular la fuer-

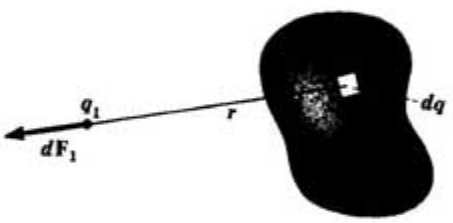


Fig. 1.2 Cálculo de la fuerza sobre una carga q_1 debida a una distribución continua de carga. Los campos debidos a cada elemento dq, a la distancia r, deben sumarse vectorialmente. $\hat{\mathbf{r}}$ está dirigido desde dq a q_1, y $d\mathbf{F}_1$ es la contribución a $\mathbf{F}_1$ de la interacción entre q_1 y dq.

za total sobre q_1 debida a todas las otras cargas. Como sugiere nuestra discusión anterior, tendremos que realizar una suma vectorial de todas las fuerzas debidas a todas las pequeñas cargas dq distribuidas en la región. Así podremos escribir

$$\mathbf{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q_1\, dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{1.7}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario de dirección variable dirigido desde cada dq hacia la posición de la carga q_1.

1.3 Ejemplos

Damos a continuación unos pocos ejemplos de casos particulares en los que se hace uso de las ideas discutidas hasta aquí. Algunos de ellos se tratan solo muy brevemente, puesto que en los capítulos siguientes se les aplicarán métodos más generales.

a) Fuerza entre dos cargas puntuales. Dos cargas puntuales q_1 y q_2 se encuentran separadas por una distancia r, tal como se indica en la Fig. 1.3. Encontrar la fuerza que se ejercen entre sí.

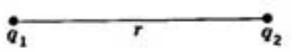


Fig. 1.3 Dos cargas puntuales superadas por una distancia r.

Este es evidentemente el caso más elemental posible. En el sistema mks habremos de poner q_1 y q_2 en culombios, y r en metros, F resultará en newtons según:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = 9 \times 10^9 \frac{q_1 q_2}{r^2} \qquad \textbf{newtonios}$$

Para dar el resultado completo, habrá que añadir que la fuerza actúa según la línea que une las cargas y que es, o atractiva (negativa), o repulsiva (positiva).

b) Fuerza sobre una carga debida a otras dos. Por conveniencia escogemos una geometría sencilla en ángulo recto como muestra la Fig. 1.4. Se deduce inmediatamente la solución si recordamos la naturaleza vectorial de la fuerza (y que la fuerza entre dos cargas es independiente de la presencia de otras cargas). Calculemos las fuerzas sobre q, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, independientemente de acuerdo con la ley de Coulomb, como en el Ejemplo 1.3*a*, y después sumemos vectorialmente. En este caso sencillo, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ da lugar a

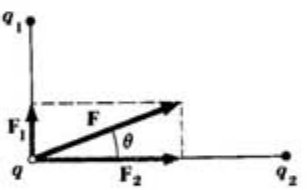


Fig. 1.4 Fuerza resultante sobre q, debida a q_1 y q_2, obtenida por suma vectorial de las fuerzas individuales.

$$|\mathbf{F}| = \sqrt{|\mathbf{F}_1|^2 + |\mathbf{F}_2|^2}$$

La dirección de $\mathbf{F}$ viene dada naturalmente por $F_1/F_2 = \text{tg}\ \theta$ o $\theta = \text{tg}^{-1}\ F_1/F_2$.

c) Fuerza debida a una distribución lineal de carga. Imaginemos una varilla larga y delgada (véase Fig. 1.5) con una distribución uniforme de carga sobre ella. Supongamos que la carga total de la varilla es Q. ¿Cuál será la fuerza total de esta carga sobre otra q si-

tuada en la prolongación de la varilla a una distancia a? En este caso se requiere utilizar una ecuación del tipo (1.7), integrando a toda la distribución de carga. Por tanto, debemos encontrar una expresión que nos permita sumar para cada elemento de longitud Q, te-

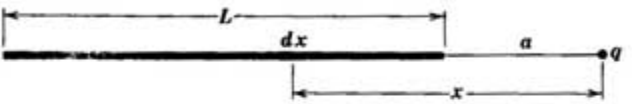


Fig. 1.5 Cálculo de la fuerza sobre una carga q debida a una distribución continua lineal de cargas.

niendo en cuenta su distancia a q. Una forma conveniente de hacerlo es definir un elemento de carga dQ situado a la distancia x de q. La fuerza sobre q debida a este elemento será

$$dF = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{x^2}$$

Para integrarla, deberemos relacionar de alguna forma cada dQ con la x apropiada. Se ve inmediatamente que Q/L es la *densidad lineal* de carga en la varilla, que llamaremos μ. Si la longitud de nuestro elemento es dx, la carga contenida en el mismo será $\mu\, dx$. Por tanto, nuestra ecuación quedará

$$dF = \frac{q\mu}{4\pi\epsilon_0}\frac{dx}{x^2}$$

que ya puede ser integrada. Así, pues,

$$F = \int_a^{L+a} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\frac{dx}{x^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\int_a^{L+a}\frac{dx}{x^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 L}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{L+a}\right)$$

Que puede simplificarse, dando

$$F = +\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a(L+a)} \qquad \textbf{newtonios}$$

El signo positivo indica que la fuerza es repulsiva si q y Q tienen el mismo signo. Es fácil comprobar que esta solución es razonable. Supongamos que fuera $a >> L$; las fuerzas deberían ser entonces aproximadamente equivalente a las que hay entre dos cargas puntuales q y Q. Esto es exactamente lo que resulta si despreciamos L, como estaría justificado si $a >> L$. Esto es, cuanto más nos separemos de la varilla, más aproximadamente actúa ésta como una carga puntual.

Aún puede hacerse otro comentario sobre este problema: Hemos elegido un ejemplo particularmente sencillo en el que la dirección de la fuerza debida a cada elemento de carga es la misma. Esto nos permite despreciar el carácter vectorial de la fuerza durante la integración, puesto que la suma de varios vectores que tienen todos la misma dirección y sentido es evidentemente la suma aritmética de sus módulos. En problemas posteriores veremos el caso general.

1.4 Carga eléctrica y materia

Las cargas eléctricas y la materia están íntimamente relacionadas. Una breve discusión sobre unas cuantas cuestiones básicas en este momento, será de indudable valor más adelante, cuando describamos algunos de los experimentos fundamentales de la electricidad.

La carga eléctrica es una magnitud básica en la estructura del átomo. Alrededor de un *núcleo* cargado positivamente están girando *electrones* cargados negativamente. Una de las fuerzas más importantes en los átomos es la atracción entre las cargas opuestas de electrones y núcleo. Si se aplican a los electrones existentes en los átomos fuerzas suficientemente grandes, algunos de ellos pueden llegar a ser arrancados a pesar de la fuerza atractiva del núcleo. Este es el origen de los electrones que constituyen la corriente eléctrica, que tiene un papel tan importante en electricidad y magnetismo.

Cuando los átomos se combinan para formar sólidos, ocurre frecuentemente que uno o más de los electrones normalmente ligados a cada átomo quedan liberados y pueden moverse más o menos libremente por el sólido. Estos son los *electrones de conducción* en los metales. Cuando no tiene lugar esta liberación de electrones, decimos que la sustancia es un aislante o dieléctrico. En estas sustancias los electrones no se separan de sus átomos, y, por tanto, las fuerzas exteriores no pueden producir corrientes en el material. Sin embargo, discutiremos más adelante ciertos fenómenos eléctricos en estas sustancias; veremos que por no estar los centros de carga eléctrica rígidamente unidos, al desplazarse ligeramente bajo la acción de fuerzas exteriores dan lugar a una variedad de efectos dieléctricos de gran interés.

Podríamos establecer una tercera categoría de sólidos en los que es posible liberar alguna de las cargas ligadas y así permitir el paso de corriente en la sustancia, al menos en tanto que estos portadores de carga permanezcan libres. Tal tipo de sustancia se denomina *semiconductor*. La liberación de las cargas ligadas puede originarse por las vibraciones térmicas en el semiconductor, por luz incidente sobre él o por la aplicación de campos eléctricos exteriores.

La liberación de electrones de los átomos de la superficie de los sólidos explica la electrización de los cuerpos al frotar entre sí sustancias como el ámbar y la piel de gato. De las dos sustancias frotadas, aquella de la que los electrones se separan más fácilmente tiende a perder electrones y adquiere una carga positiva, y la otra queda cargada negativamente al recoger un exceso de electrones.

1.5 Aparatos electrostáticos

El electroscopio. Uno de los primeros instrumentos para medir la existencia de carga es el electroscopio de panes de oro. Dos laminillas de oro están unidas a una varilla metálica aislada como se indica en la Fig. 1.6. Si se sitúa un exceso de carga sobre la varilla,

Fig. 1.6 Esquema de un electroscopio de panes de oro.

parte de la carga fluye hasta las laminillas que entonces se repelen mutuamente. La magnitud de la separación de las laminillas dependerá cuantitativamente de la cantidad de carga en el electroscopio. Este indicador de carga bastante primitivo aún es usado en experiencias didácticas.

El electróforo. Este primitivo aparato es uno de los más simples para obtener separación de cargas. Una de sus formas modernas,

Fig. 1.7 Electróforo. La carga inducida debida a cargas existentes en la placa aisladora A puede ser recogida sobre la capa metálica B.

usada frecuentemente con fines didácticos, es la esquematizada en la Fig. 1.7. La placa *A* es de un aislante adecuado, por ejemplo, cera,

y su superficie puede cargarse frotándola con una piel de gato. *B* es una placa metálica, con un mango aislante. El objeto del aparato es cargar repetidamente la placa metálica por medio de un ciclo de operaciones adecuado. Cada vez que la placa está cargada es posible trasladar a algún cuerpo aislado, tal como un electroscopio, toda o la mayor parte del exceso de carga que tiene. El método de operación es el siguiente: Después de que la superficie de la placa *A* tiene un exceso de electrones, se le aproxima lo más posible la placa *B* sin que llegue a tocarla. Bajo la influencia de las cargas negativas existentes en *A*, algunas de las cargas negativas móviles del metal son repelidas, quedando la cara inferior de la placa *B* con una carga positiva neta. Sobre la cara superior queda un exceso igual de carga negativa, puesto que la placa metálica estaba originalmente en estado neutro. En este momento, se toca con un dedo la cara superior de la placa. Por ser el cuerpo humano un conductor bastante bueno, esta acción permite que algunos de los electrones en exceso de la cara superior de la placa se escapen por el dedo como consecuencia de las fuerzas repulsivas de unos electrones con otros. Al dejar de tocar la placa *B*, queda con exceso de carga positiva que puede trasladarse a voluntad a cualquier otro aparato. (En realidad, pasarán electrones de éste a la placa, neutralizándola y quedando el aparato con una carga positiva neta, pero podemos hablar perfectamente de un flujo de carga positiva desde la placa al aparato.) El proceso descrito no modifica el exceso de carga colocado originalmente sobre la placa aislante *A*. Por tanto, puede repetirse el ciclo anterior muchas veces con el resultado de recoger una gran cantidad de carga en el aparato. Este método de cargar la placa metálica se conoce con el nombre de electrización por influencia.

Atracción de cuerpos neutros por cuerpos cargados. Como ya se ha mencionado, una barra cargada atrae trocitos de papel. A primera vista esto es sorprendente, puesto que el papel está normalmente descargado. Se explica fácilmente al darnos cuenta de que, aunque

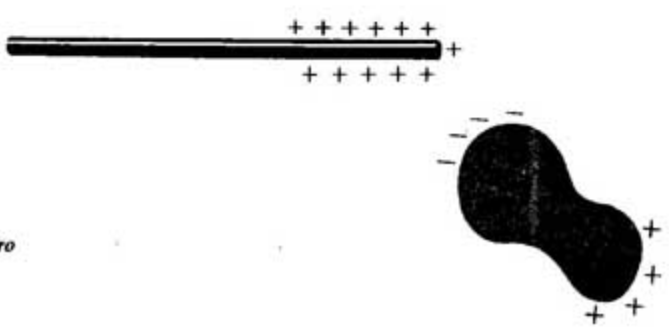


Fig. 1.8 Atracción de un cuerpo neutro por una barra cargada.

la carga total del trozo de papel es nula, bajo la influencia de la barra cargada se redistribuyen las cargas existentes en el papel separándose cargas iguales positivas y negativas como ocurría en la placa metálica del electróforo; de este modo se produce una fuerza neta atractiva, como se ve en la Fig. 1.8. Como veremos más adelante, tal redistribución de carga puede tener lugar incluso en un aislante.

Si los trocitos de papel tocan la barra cargada, tienden a salir volando al momento. Este es el resultado del paso de algunas cargas de la barra al papel, poniendo así en juego la repulsión mutua entre las cargas de igual clase existentes ahora en la barra y el papel.

Generadores electrostáticos. Se usan frecuentemente dos tipos de generadores electrostáticos para obtener grandes concentraciones de carga, con una alta *tensión* o alto *potencial* (más adelante se discutirán estos términos) resultantes. Uno es la máquina de Wimshurst, de origen antiguo, que es una máquina complicada con unos discos giratorios, que se cargan por inducción y de los que se extraen mediante conductores metálicos las cargas acumuladas. Un dispositivo más eficaz es el generador de Van de Graaff. Es una máquina moderna, cuyos modelos más grandes pueden producir millones de voltios para su uso en aceleradores de partículas en experimentos de física nuclear. Consiste en una correa aislada sobre uno de cuyos extremos se depositan cargas; estas cargas son transportadas al otro extremo y recogidas. En los laboratorios de física existen frecuentemente modelos pequeños del generador de Van de Graaff para prácticas.

PROBLEMAS

1.1 Tres cargas puntuales $+Q_1$, $-Q_2$ y $+Q_3$ están espaciadas igualmente a lo largo de una recta tal como se indica en la Fig. P 1.1. Si los valores de Q_1 y Q_2 son iguales, ¿cuál habrá de ser el valor de Q_3 para que la fuerza neta sobre Q_1 sea cero?

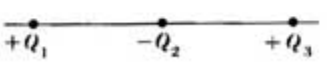


Fig. P 1.1

1.2 Tres cargas puntuales iguales de Q culombios están colocadas en los vértices de un triángulo equilátero, de 10 cm de lado. Calcular la fuerza que actúa sobre cada carga.

1.3 *a*) Encontrar la fuerza sobre una carga puntual de $2Q$ culombios situada en el centro de un cuadrado, de 20 cm de lado, si se sitúan cuatro cargas puntuales idénticas de Q culombios en las esquinas del cuadrado.

b) Encontrar la fuerza que actúa sobre la carga central cuando se quita una de las cargas de las esquinas.

1.4 Una carga puntual de Q_2 culombios está situada sobre el eje x a una distancia de a metros de otra carga puntual de Q_1 culombios, tal como se muestra en la Fig. P 1.4. Calcular la fuerza sobre Q_2 y después el trabajo necesario para mover Q_2 desde a hasta una distancia b de Q_1.

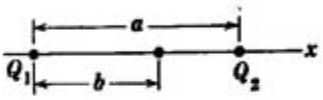


Fig. P 1.4

1.5 Un anillo circular delgado de 3 cm de radio tiene distribuida uniformemente sobre él una carga total de 10^{-3} culombios. ¿Cuál es la fuerza sobre una carga de 10^{-2} culombios situada en su centro? ¿Cuál sería la fuerza sobre esta carga si estuviera colocada sobre el eje del anillo, pero a una distancia de 4 cm del plano del mismo?

1.6 Dos cargas de Q culombios están situadas en dos de los vértices opuestos de un cuadrado. ¿Qué cargas q sería necesario añadir en los otros dos vértices para conseguir que la fuerza resultante sobre cada una de las cargas Q fuera nula? ¿Es posible elegir estas cargas de modo que la resultante de las fuerzas eléctricas sea nula para *todas y cada una* de las cargas?

1.7 Calcular la relación entre la repulsión electrostática y la atracción gravitatoria entre dos electrones. La carga del electrón es $-1{,}6 \times 10^{-19}$ culombios y su masa $9{,}0 \times 10^{-31}$ kg. La constante de gravitación universal vale $6{,}670 \times 10^{-11}$ newton-m^2/kg^2.

1.8 En un átomo de hidrógeno el electrón negativo se mueve describiendo una órbita alrededor del protón positivo (mucho más pesado), retenido por efecto de las fuerzas eléctricas de Coulomb. Admitiendo que la órbita es circular y tiene un radio de $0{,}528 \times 10^{-8}$ cm, calcular el número de revoluciones por segundo que da el electrón; calcúlese también el momento cinético del sistema. ¿Cuán grande debería ser el átomo de hidrógeno si su movimiento tuviera el mismo momento cinético, pero fuera debido a fuerzas de tipo gravitatorio?

DOS

El Campo Eléctrico

2.1 Introducción

En este capítulo desarrollamos un método algo más general de manejar el tipo de problemas descritos en el Cap. 1. Consiste en el empleo del concepto de *campo eléctrico*. Este nuevo punto de vista nos permitirá extender nuestras ideas y simplificar nuestro concepto de las cargas y las fuerzas que se ejercen entre ellas. Después de introducir el campo eléctrico, discutiremos el empleo de las líneas de fuerza para su representación; finalmente veremos cómo puede establecerse el *teorema de Gauss* y las ventajas que proporciona su empleo en ciertos casos.

2.2 El campo eléctrico

Puede definirse el campo eléctrico en un punto dado del espacio como la fuerza por unidad de carga que actuaría sobre una carga dada situada en dicho punto. Puesto que supone la medida de una fuerza, el campo debe ser una magnitud vectorial, que designaremos

con el símbolo **E**. Consideremos desde este nuevo punto de vista la fuerza que actúa sobre una carga de prueba q situada en un punto dado del espacio, debido a la acción de otras cargas existentes en la región. Si aplicamos la expresión general

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{qq_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \tag{1.6}$$

al caso indicado en la Fig. 2.1, en el que el punto que nos interesa

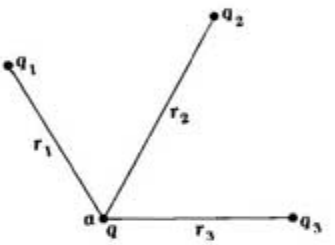


Fig. 2.1 Cálculo de la fuerza sobre la carga q debida a las cargas q_1, q_2, q_3. El campo eléctrico en a es la fuerza por unidad de carga en a, debida a las cargas q_1, q_2 y q_3.

es el a, y las únicas cargas que actúan sobre la de prueba que ponemos en a son las cargas fijas q_1, q_2 y q_3, la Ec. (1.6) nos queda:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{qq_1}{r_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{qq_2}{r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2 + \frac{qq_3}{r_3^2}\hat{\mathbf{r}}_3\right)$$

Por tanto, el campo eléctrico **E** en el punto a vendrá dado por

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2}{r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2 + \frac{q_3}{r_3^2}\hat{\mathbf{r}}_3\right)$$

Esto es, sin más que dividir por q toda la ecuación. Con ello nuestro cálculo nos da, no la fuerza sobre la carga q, sino la fuerza sobre una carga *unidad* que estuviera situada en a. Esto es precisamente nuestra definición para **E**, el campo eléctrico en el punto a debido a las cargas q_1, q_2 y q_3 (pero no a q evidentemente).

En general, el campo en un punto dado será

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{2.1}$$

y, para una distribución continua de cargas

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \tag{2.2}$$

en las que $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unitario de dirección variable que está diri-

gido desde cada q_i o dq hacia el punto del espacio en el que estamos calculando el campo **E**.

Podemos usar ahora esta nueva magnitud para calcular la fuerza sobre una cierta carga q_0 situada en un punto cualquiera. El procedimiento consiste simplemente en calcular el campo **E** en el punto en cuestión, y entonces

$$\mathbf{F} = q_0\mathbf{E} \tag{2.3}$$

En general, puede obtenerse la fuerza sobre una carga cualquiera calculando el campo eléctrico y multiplicándolo por la magnitud de la carga. Por ser (2.3) una ecuación vectorial, **E** y **F** tienen la misma dirección; además tienen el mismo sentido si q_0 es positiva, pero tienen sentidos opuestos si es negativa. Para un ejemplo tan sencillo podríamos igualmente haber calculado la fuerza sobre nuestra carga q_0 directamente de la Ec. (1.6), sin hacer referencia alguna al campo eléctrico.

La introducción del campo **E** permite un tratamiento más general, que facilita el estudio de situaciones mucho más complicadas. Con él hemos introducido un *campo vectorial*. Podemos imaginar una representación del campo eléctrico en una región en la forma indicada en la Fig. 2.2 que nos da, en magnitud y dirección, la fuerza

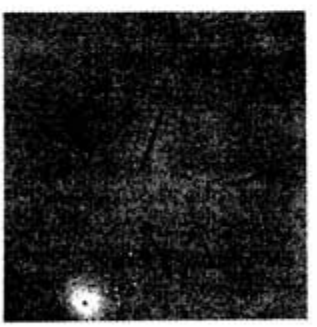


Fig. 2.2 El campo eléctrico es un campo vectorial. A cada punto del espacio puede asignársele un vector.

por unidad de carga en los distintos puntos de esta región. Podemos pensar que el campo es una descripción del estado del espacio en una región dada. De este modo, alejamos nuestra atención de las cargas individuales que crean el campo y en su lugar la concentramos en el efecto que su presencia tiene en el espacio que rodea las cargas. Más adelante trabajaremos extensamente con este campo vectorial, en este momento vamos a limitarnos a examinar unos cuantos problemas sencillos. Es interesante señalar que el valor del campo eléctrico puede muy bien ser cero en determinados puntos. Igualmente, que el valor de esta nueva magnitud vectorial es siempre finito (o cero) en tanto que nos mantengamos alejados de la inme-

diata vecindad de cualquiera de las cargas que crean el campo. Si nos aproximamos demasiado a cualquiera de ellas, **E** tiende a infinito, puesto que la distancia r en q/r^2 tiende a cero. En la mayor parte de nuestro estudio de la electricidad evitaremos esta dificultad permaneciendo suficientemente lejos de las cargas eléctricas. Es posible admitir esto, sin interferir seriamente con la utilidad de nuestras consideraciones, por el hecho de que las cargas están realmente muy concentradas, por ejemplo, en electrones y protones.

Vamos a señalar ahora una puntualización necesaria en nuestra primera definición de campo eléctrico. Más exactamente, definiremos el campo por:

$$\mathbf{E} = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta q} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{E} = \frac{d\mathbf{F}}{dq} \tag{2.4}$$

Esto es, el campo es el valor límite a que tiende la fuerza por unidad de carga cuando la carga de prueba se hace infinitamente pequeña. Este refinamiento es necesario porque hay casos en los que una carga de prueba finita, por su misma presencia, altera la distribución de cargas que producen el campo. Por ejemplo, supongamos que el campo eléctrico es debido a cargas situadas sobre conductores aislados. Si introducimos una carga finita, las otras cargas que creaban el campo se redistribuyen como consecuencia de las fuerzas entre ellas y la carga de prueba. El campo resulta, pues, modificado, por la presencia de la carga de prueba, en un grado que depende del tamaño de ésta. La definición según la Ec. (2.4) evita este fallo.

Las Ecs. (2.1) y (2.2) son muy importantes. Proporcionan el procedimiento para calcular el campo eléctrico en un punto dado debido a una distribución de cargas. El método es siempre posible y a continuación veremos algunos ejemplos de cálculo de campos según este procedimiento.

2.3 Ejemplos. Cálculo de campos eléctricos

a) Campo de un grupo de cargas puntuales. Dadas las cargas q_1 y q_2 situadas, como indica la Fig. 2.3, a las distancias a y b del origen so-

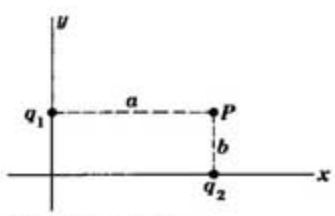


Fig. 2.3 Cálculo del campo en el punto P, debido a las cargas q_1 y q_2.

bre los ejes x e y respectivamente, calcular el valor del campo **E**

en el punto P (a,b). Empleando la Ec. (2.1), podemos escribir:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{a^2}\hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q_2}{b^2}\hat{\mathbf{r}}_2\right)$$

Por ser en este caso los dos vectores perpendiculares, el campo en el punto P resulta

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{\left(\frac{q_1}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{b^2}\right)^2}$$

y el ángulo θ, esto es, el formado por el campo resultante con el eje x vendrá dado por

$$\frac{q_2/b^2}{q_1/a^2} = \text{tg } \theta$$

b) Campo radial de una varilla larga uniformemente cargada. En contraste con el Ejemplo 1.3*c*, se busca ahora el campo eléctrico en vez de la fuerza sobre una carga determinada. Además, en este ejemplo, el punto de nuestro interés es lateral respecto a la línea que contiene la distribución de carga. Esto introduce toda la complejidad de realizar la suma vectorial al integrar. Como se indica en la Fig. 2.4

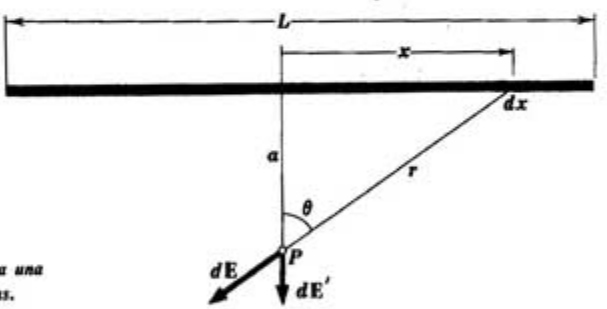


Fig. 2.4 Cálculo del campo debido a una distribución uniforme lineal de cargas.

calcularemos el campo eléctrico $\mathbf{E}$ en el punto P, situado a una distancia a a lo largo de la bisectriz de la varilla. Como en el caso anterior llamaremos μ a la densidad lineal de carga, Q/L, siendo Q la carga total de la varilla.

El problema se simplifica si remplazamos la variable x por el ángulo θ. Podemos entonces expresar las diferentes distancias x y r en función del ángulo θ y la distancia fija a.

La componente del campo en P debida al elemento de carga $\mu\, dx$ es $dE = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\mu\, dx}{r^2}$ según la ley de Coulomb. Por ser $x/a = \text{tg } \theta$ y $a/r = \cos\theta$, tendremos $dx = a \sec^2\theta\, d\theta$ y $r = a/\cos\theta$. Sustituyendo nos queda $dE = (1/4\pi\epsilon_0)\mu/a\, d\theta$. Como las distintas componentes

$d\mathbf{E}$ debidas a los diferentes elementos de carga no están en la misma dirección, deben sumarse vectorialmente. El problema de realizar la suma vectorial de estas componentes individuales resulta trivial si se aprovecha la simetría que presenta el problema. En efecto, si el punto P está situado frente al centro de la varilla uniformemente cargada, las componentes según el eje x de cada $d\mathbf{E}$ deben anularse (puesto que por cada elemento a la distancia x existirá otro equivalente a la distancia $-x$), mientras que las componentes radiales, según a, se sumarán. Por tanto, bastará tomar las proyecciones sobre a de cada $d\mathbf{E}$ para obtener la suma vectorial deseada. Esta proyección, que llamaremos $d\mathbf{E}'$, vendrá dada por

$$dE' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mu}{a}\cos\theta\, d\theta$$

El campo total $\mathbf{E}'$ en el punto P para una varilla muy larga se obtendrá integrando

$$E' = \frac{2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mu}{a}\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{2\mu}{4\pi\epsilon_0 a}$$

Si la varilla no es muy larga, será necesario introducir el límite superior de integración apropiado. Si la varilla es finita y el punto P no se encuentra frente al punto medio de la misma, no podemos hacer uso de la condición de simetría anterior y la solución es más complicada. Conviene destacar que la ley de Coulomb del tipo $1/r^2$ se refiere únicamente a cargas puntuales; en este problema, por ejemplo, el campo disminuye cuando nos separamos de la varilla como $1/a$.

c) Campo debido a un dipolo eléctrico. Un par de cargas puntuales iguales y de signo contrario separadas por un vector distancia $\mathbf{a}$ se llama *dipolo*. El vector $\mathbf{a}$ se dibuja desde la carga negativa a la

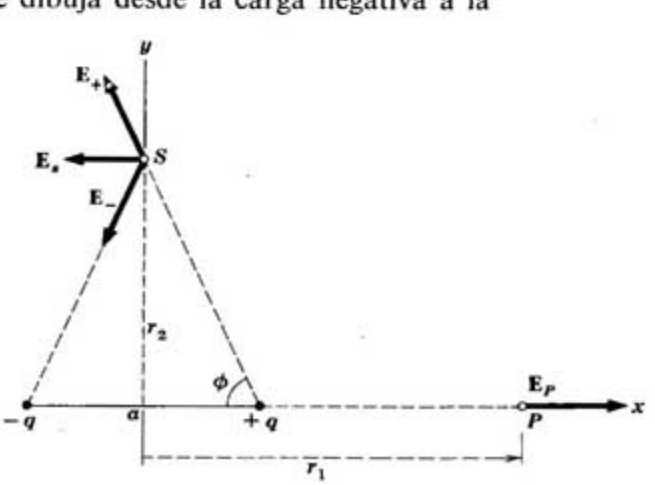


Fig. 2.5 Cálculo del campo de un dipolo de momento p = qa.

positiva y está situado a lo largo del llamado *eje* del dipolo. El cálculo del campo de un dipolo es un problema fácil que no exige integración puesto que se trata únicamente de cargas puntuales. Es un problema importante, pues los dipolos se encuentran con frecuencia. Por ejemplo, una molécula en determinadas condiciones puede constituir un dipolo. Asimismo, el dipolo resulta con frecuencia la primera etapa más conveniente para la descripción de agrupaciones más complicadas de cargas.

Calcularemos el campo del dipolo a lo largo de su eje y en el plano perpendicular al dipolo en su centro. Más adelante haremos el cálculo para un punto cualquiera. Por conveniencia, situaremos el dipolo a lo largo del eje x y en el origen del sistema de coordenadas, en la forma indicada en la Fig. 2.5. El problema posee simetría cilíndrica, por lo que limitaremos nuestra discusión a los ejes x e y.

Veamos primero el campo en un punto P situado a una distancia r_1 del centro del dipolo. Será

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{(r_1 - a/2)^2} - \frac{q}{(r_1 + a/2)^2}\right]$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2r_1 a}{(r_1^2 - a^2/4)^2}\right]$$

En el punto S los campos debidos a $+q$ y $-q$ los llamaremos $\mathbf{E}_+$ y $\mathbf{E}_-$, respectivamente. Sus componentes según el eje y se anularán, mientras que sus componentes según el eje x se sumarán para dar el campo resultante $\mathbf{E}_S$. Por tanto:

$$E_S = |\mathbf{E}_+|\cos\phi + |\mathbf{E}_-|\cos\phi$$

o sea

$$E_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{r_2^2 + (a/2)^2} + \frac{q}{r_2^2 + (a/2)^2}\right]\frac{a/2}{[r_2^2 + (a/2)^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{[r_2^2 + (a/2)^2]^{3/2}}$$

Una aproximación muy útil, válida a distancias mucho mayores que la que separa las cargas a, se obtiene despreciando $a^2/4$ frente a r^2. Entonces encontramos

$$E_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r_1^3} \tag{2.5}$$

$$E_S = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r_2^3} \tag{2.6}$$

En estas ecuaciones hemos escrito p en lugar de qa; es el llamado *momento del dipolo*. En efecto, en puntos cuya distancia al dipolo es grande en comparación con la separación entre las cargas a, el campo debido a cargas relativamente grandes, pero muy próximas, puede ser el mismo que para cargas menores que estén más separadas. Lo que importa es el producto: carga × separación. Esta es la razón de emplear el concepto de momento dipolar al analizar esta situación. El campo de un dipolo disminuye como $1/r^3$, en lugar de la dependencia de la forma $1/r^2$ que presenta el campo debido a una carga puntual aislada.

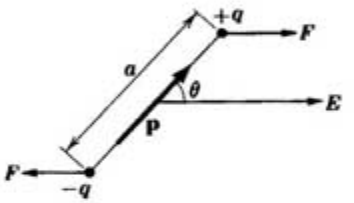


Fig. 2.6 Par sobre un dipolo eléctrico situado en un campo eléctrico uniforme. Nótese el sentido positivo del vector momento dipolar $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$.

Es importante considerar en este momento el par que un campo eléctrico uniforme ejerce sobre un dipolo. En la Fig. 2.6 se ha representado la situación, el par τ vendrá dado evidentemente por

$$\tau = qaE \operatorname{sen}\theta$$

donde θ es el ángulo entre el eje del dipolo y el campo constante E. Si sustituimos aquí también qa por p, tenemos

$$\tau = pE \operatorname{sen}\theta \qquad (2.6a)$$

El momento dipolar puede ser tratado como una magnitud vectorial, $\mathbf{p} = q\mathbf{a}$, dirigida desde la carga negativa a la positiva. Vemos, pues, que el par sobre el dipolo debido a un campo eléctrico exterior tiende a alinear el dipolo paralelamente al campo.

d) Campo debido a una distribución de cargas en un plano. Supongamos que tenemos una superficie plana sobre la que están distribuidas uniformemente cargas con densidad superficial σ culombios/m^2. Deseamos calcular el campo en un punto P situado a la distancia a del plano, como indica la Fig. 2.7, y supondremos que las dimensiones del plano son mucho mayores que a. Haremos uso de la Ec. (2.2) para sumar vectorialmente las contribuciones de todas las cargas al campo en P. Empezaremos por calcular la contribución de un anillo de carga de radio r y anchura dr para después integrar a todos los anillos de este tipo que constituyen el plano cargado. En realidad el cálculo de la contribución de las cargas contenidas en el anillo es un problema de integración en dos dimensiones, pero gra-

cias a la simetría del problema podemos reducirlo a una integración simple. La contribución de cualquier elemento de carga contenido en el anillo al campo en P forma un ángulo θ con el eje x tal como se

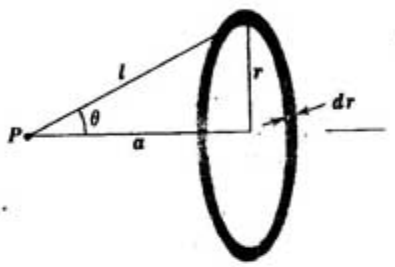


Fig. 2.7 Cálculo del campo eléctrico en el punto P debido a una distribución plana de cargas por integración de las contribuciones de anillos concéntricos.

ve en la figura. Sin embargo, debido a la simetría, las componentes de **E** perpendiculares al eje x se anulan. Por tanto, solo habremos de considerar las componentes de **E** según dicho eje. Así, pues, podemos hacer uso de la Ec. (2.2) para escribir

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma 2\pi r\, dr}{l^2}\cos\theta$$

que será el campo en P debido al anillo de carga. A fin de que figure en la integral una sola variable, sustituiremos $a \operatorname{tg}\theta = r$ y $a/\cos\theta = a\sec\theta = l$. Diferenciando encontramos $dr = a\sec^2\theta\, d\theta$. Haciendo estas sustituciones, obtenemos

$$dE = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\operatorname{tg}\,\theta\sec^2\theta\cos\theta}{\sec^2\theta}d\theta = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Esta es la contribución al campo en P del anillo que hemos elegido. Para obtener el campo total en P debido a todos los anillos en que se puede considerar descompuesta la distribución plana de cargas, integraremos esta expresión a todo el plano. Podemos tomar los límites de integración desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$. Así tendremos

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}[\cos\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

El campo resultante tiene la dirección del eje x y es independiente de la distancia al plano en tanto que el plano pueda considerarse muy grande comparado con la distancia a.

2.4 Conductores y campos eléctricos

Vamos ahora a considerar el campo eléctrico en la vecindad de un cuerpo conductor. El campo eléctrico *en el interior* de un trozo de metal es cero en estado de equilibrio; si así no fuera, las cargas móviles presentes, que dan cuenta precisamente de sus propiedades conductoras, se moverían bajo la acción del campo hasta que quedaran redistribuidas de modo que se anulara el campo. Por tanto, la única situación de equilibrio para los electrones de conducción es aquella en la que el campo medio resultante, debido tanto a las cargas exteriores como a las cargas redistribuidas en el metal, sea cero.

Se deduce de esto, que la dirección del campo eléctrico junto a la superficie exterior de un cuerpo metálico es siempre normal a dicha superficie. Si no fuera así, existiría una componente del campo paralela a la superficie. Tal componente del campo haría moverse de nuevo los electrones de conducción hasta que dicha componente fuera reducida a cero por la nueva distribución de cargas.

Finalmente, podemos establecer que los campos eléctricos no pueden penetrar en los conductores (puesto que deben ser cero en su interior). Los conductores constituyen una excelente pantalla para los campos eléctricos.

Aunque las conclusiones que hemos alcanzado son satisfactorias desde un punto de vista práctico, hemos despreciado dos factores. El primero es que estamos considerando el caso estático. Con un campo que varíe rápidamente la situación es muy distinta. El segundo, que el modelo de conductor que hemos tomado supone una distribución de volumen de carga positiva completamente continua compartiendo ese volumen con una distribución igual de cargas negativas móviles. Esto resulta suficiente para los propósitos actuales, aunque esté muy lejos de la realidad; en efecto, precisamente el carácter discontinuo de la distribución (debido a su naturaleza atómica) es lo que da cuenta de muchas propiedades interesantes de la materia.

2.5 Líneas de fuerza

El concepto de *líneas de fuerza* resulta de gran utilidad en el estudio de los campos; está íntimamente ligado al hecho de que la fuerza entre cargas puntuales varía de modo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. En efecto, hay una equivalencia completa entre la idea de líneas de fuerza y la ley de Coulomb. Conocida la definición de líneas de fuerza que vamos a dar, podemos deducir sin hipótesis adicionales que se cumple la ley del cuadrado de la distancia. Análogamente, esta ley proporciona la justificación experimental del uso de las líneas de fuerza.

Describiremos primero el concepto de líneas de fuerza, y después daremos algunos ejemplos sencillos de los razonamientos que con ellas pueden hacerse, para discutir finalmente su relación con la ley de Coulomb.

Las líneas de fuerza son líneas que se originan exclusivamente sobre las cargas positivas y que terminan sólo sobre las cargas negativas. Por tanto, las líneas son continuas, salvo en sus *fuentes* y *sumideros*, las cargas positivas y negativas, respectivamente. El número de líneas que se originan o terminan sobre una carga es proporcional al valor de dicha carga. La *dirección* de estas líneas es en todo punto la dirección del campo eléctrico en tal punto, y la *densidad* de líneas en una región dada es una medida de la *intensidad* del campo en dicha región. Por densidad de líneas entendemos el número de líneas por unidad de superficie que atraviesan una pequeña área, normal a la dirección de las líneas, situada en un punto dado. Así,

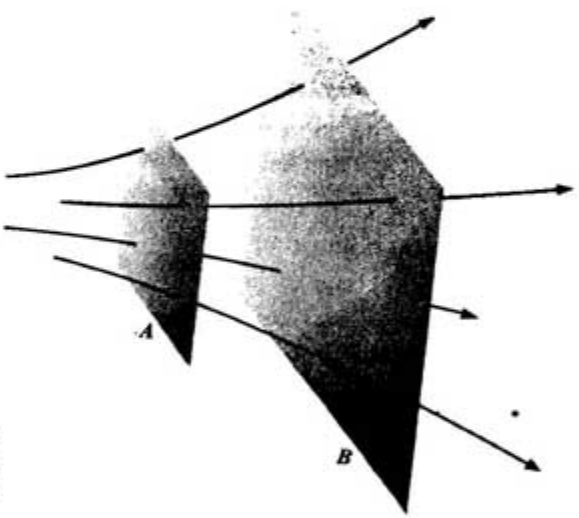


Fig. 2.8 Líneas de fuerza atravesando dos superficies A y B. La densidad de líneas y, por tanto, el campo es mayor en A que en B.

en la Fig. 2.8 la densidad de líneas de fuerza a través del plano A es mayor que la densidad en el plano B. En la Fig. 2.9 se ha trazado un esquema de alguna de las líneas de fuerza entre una carga puntual positiva y otra negativa.

Este diagrama proporciona otro medio de describir ciertos tipos de campos vectoriales. Su empleo exige que las líneas de fuerza sean continuas. Es muy diferente de nuestro anterior dibujo (Fig. 2.2) para representar un campo vectorial. A fin de poder emplear las líneas de fuerza de modo cuantitativo, es necesario fijar un valor al número de líneas que nacen por unidad de carga. Este valor establece la relación entre la densidad de líneas y la intensidad del campo.

Aclaremos esta idea considerando el número de líneas que nacen de una carga puntual aislada de $+q_0$ (culombios). Algunas de ellas se han trazado en la Fig. 2.10.

Por definición, haremos corresponder arbitrariamente a la unidad de campo (1 newton/culombio) la unidad de densidad de líneas

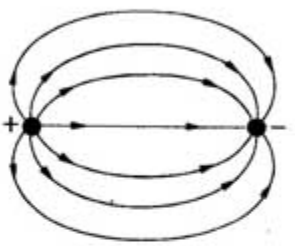


Fig. 2.9 Líneas de fuerza en un dipolo.

de fuerza (una línea por metro cuadrado). Con ello podemos determinar el valor deseado del número de líneas por unidad de carga con un sencillo razonamiento, haciendo uso de la Fig. 2.10. Dibujemos (o imaginemos) una superficie esférica de radio unidad (1 m) con la carga como centro. Por la simetría del problema para una carga aislada, o por aplicación de la Ec. (1.5), sabemos que el campo está dirigido en todas partes radialmente hacia afuera de la carga puntual. Por tanto, las líneas de fuerza deben ser líneas rectas radiales, y la densidad de estas líneas en su intersección con la su-

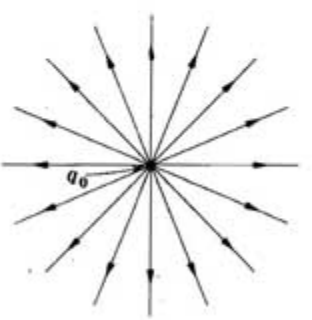


Fig. 2.10 Líneas de fuerza alrededor de una carga puntual aislada.

perficie esférica es constante (por simetría). El campo eléctrico E en esta superficie será $E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_0}{l^2}$, y el área total de la superficie es 4π. Por tanto, el campo en la superficie esférica de radio unidad es $q_0/4\pi\epsilon_0$, que será también el valor de la densidad de líneas de fuerza según nuestra definición. Si la multiplicamos por el área de la esfera, tendremos el número total de líneas que salen de q_0 y cortan la superficie esférica, esto es, q_0/ϵ_0. Por consiguiente nuestra de-

finición basada en el campo unidad conduce a $1/\epsilon_0$ líneas por unidad de carga.

También se hace uso de las líneas de fuerza para dar una visión cualitativa del aspecto de un campo eléctrico. En la Fig. 2.8 se han dibujado las líneas de fuerza contenidas en un plano que pasa por dos cargas iguales y de signos opuestos. Calculando la intensidad y dirección del campo en unos pocos puntos y sabiendo que las líneas de fuerza son continuas, es posible trazar una serie de tales líneas. Este diagrama no solo da información precisa sobre la dirección del campo, sino que proporciona también información cualitativa sobre las magnitudes relativas de la *intensidad del campo* en puntos diferentes.

Finalmente, en ciertos casos de gran simetría, el concepto de líneas de fuerza permite una solución muy sencilla de algunos problemas sobre campos. El formalismo matemático de este método se conoce como teorema de Gauss y se discutirá más adelante.

Existe una conexión simple entre la ley de Coulomb y las líneas de fuerza. Consideremos de nuevo el caso de una carga puntual aislada como se indica en la Fig. 2.10. Vamos a calcular el campo a una distancia de 2 m, haciendo uso del punto de vista de las líneas de fuerza. Ya hemos visto que la densidad de líneas a 1 m es $q_0/4\pi\epsilon_0$. Como se ve en la Fig. 2.11, el área de superficie esférica que sub-

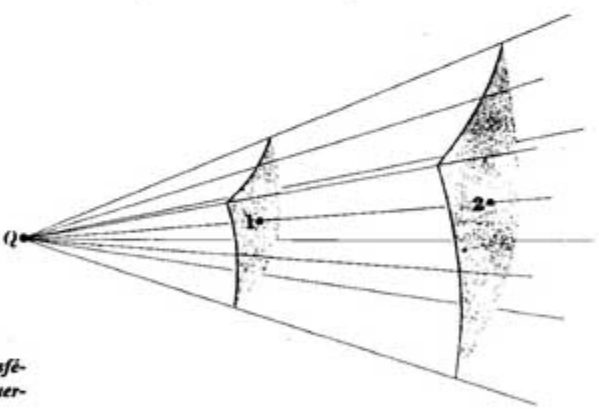


Fig. 2.11 Porciones de superficies esféricas limitadas por un haz de líneas de fuerza que sale de una carga puntual.

tiende un haz de líneas que salen de la carga puntual es cuatro veces mayor para una superficie a 2 m de distancia que para una superficie a 1 m. Por consiguiente la densidad de líneas de fuerza a 2 m es justamente la cuarta parte que a 1 m, lo que está en acuerdo exacto con el resultado que se obtendría de usar la ecuación que nos da el campo [Ec. (2.1)]. Resulta, pues, al menos para una carga puntual aislada, que el campo en un punto de sus proximidades, puede calcularse igualmente bien mediante la idea de líneas de fuerza, que

mediante la ley de proporcionalidad inversa al cuadrado de la distancia. Este resultado está relacionado con las propiedades de los ángulos sólidos, como vamos a discutir en la sección siguiente.

2.6 Teorema de Gauss

El estudio de casos más complicados que carecen de simetría esférica se consigue mejor haciendo uso del teorema de Gauss. Debemos señalar, sin embargo, que éste realmente no implica nada más que la validez del concepto de líneas de fuerza. Matemáticamente el teorema se enuncia como sigue:

$$\iint_{SC} E_n \, dS = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

o, más sencillamente, usando notación vectorial,[1]

$$\iint_{SC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} \tag{2.7}$$

En donde la magnitud escalar dS es el elemento de área. El vector $d\mathbf{S}$ es el vector elemento de área, que tiene de módulo la magnitud de dS y que está dirigido según la normal exterior de la superficie. El símbolo SC en la integral indica que la integración ha de realizarse sobre una superficie cerrada que incluya todas las cargas a las que se extiende la suma $\sum_i q_i/\epsilon_0$.

Integral de superficie, producto escalar y ángulo sólido. La *integral de superficie* $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ define el llamado *flujo* a través de la superficie a la que se extiende la integración. La Fig. 2.12 constituye un esquema de una carga q_0 y del ángulo sólido que contiene aquellas líneas de fuerza procedentes de la carga que pasan a través del

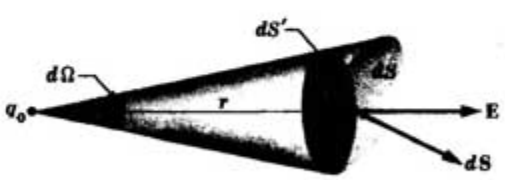


Fig. 2.12 Interpretación gráfica de los vectores que intervienen en la integral de superficie $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$.

[1] A fin de simplificar la escritura, las integrales de superficie como ésta se escribirán con un solo símbolo de integración. Debe entenderse que cuando la integral ha de extenderse a un área $d\mathbf{S}$, se trata de una integral doble. Análogamente, la integral de volumen $\iiint dV$ se escribirá en la forma $\int dV$, quedando implícito el carácter de integral triple.

elemento de superficie dS. Vamos ahora a demostrar que la cantidad subintegral $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ es sencillamente el número de líneas de fuerza que atraviesan el elemento de superficie dS.

Como primera etapa recordemos el significado del *producto escalar* de dos vectores. Es el producto del módulo de un vector por la proyección del otro sobre él. Así en la Fig. 2.13, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$, pues $A \cos \theta$ es la proyección de A sobre B; asi-

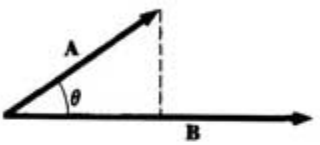


Fig. 2.13 El producto escalar de dos vectores **A** *y* **B** *es dado por* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta$.

mismo, $B \cos \theta$ es la proyección de B sobre A. El producto escalar no es un vector; estas dos descripciones son equivalentes.

Apliquemos ahora el producto escalar al caso que nos ocupa, fijándonos en la Fig. 2.12. Volviendo a la notación vectorial para el campo eléctrico (en vez de hacer uso de las líneas de fuerza), trazaríamos el vector **E** sobre el radio vector que procede de q_0. Análogamente, trazaríamos el vector $d\mathbf{S}$ normal al elemento de superficie dS, con un módulo tal que represente el área del elemento. Entonces, el producto escalar $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ nos da $E\,dS \cos \theta$, o bien $E_n\,dS$, siendo E_n la proyección $E \cos \theta$ de **E** sobre $d\mathbf{S}$, es decir, en la dirección normal al área dS. Alternativamente, puede decirse que es $E\,dS'$, siendo dS' la proyección $dS \cos \theta$ del área sobre el plano normal a **E**. Si empleamos ahora esta última descripción y volvemos al punto de vista de las líneas de fuerza, podemos interpretar el significado de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$. En efecto, puesto que el valor de **E** viene medido por la densidad de líneas, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ es justamente el número total de líneas que atraviesan el área dS. Este es el significado básico de la integral de superficie.

Podemos hacer uso también de la Fig. 2.12 para discutir el significado del ángulo sólido. El elemento de superficie dS subtiende un ángulo sólido $d\Omega$ en la carga q_0. Un ángulo sólido representa en tres dimensiones lo que la medida usual de ángulos en dos dimensiones. En el plano hablamos del ángulo que subtiende en el centro de un círculo un arco dado de circunferencia. La unidad de ángulo, el radián, es el ángulo subtendido por un arco cuya longitud es igual al radio. En tres dimensiones, un área dada sobre una superficie esférica subtiende un cierto ángulo sólido en el centro de la esfera. Este ángulo sólido es independiente de la forma del área y depende únicamente de sus dimensiones. El ángulo sólido unidad es aquel que subtiende, una superficie de área r^2, en el centro de una esfera de radio r. Esta unidad de ángulo sólido se llama *estereorradián*. El ángulo sólido total es 4π estereorradianes (puesto que la superficie total de una esfera es $4\pi r^2$); dS y dS' en la Fig. 2.12 subtienden el mismo ángulo sólido. El concepto de ángulo sólido es aplicable en forma general, aun cuando no estemos tratando con esferas. Así, una superficie dS subtiende un ángulo sólido $d\Omega$ en un punto situado a una distancia r, si se cumple

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2}$$

En esta expresión θ es el ángulo que forman el radio vector r trazado desde el punto y la normal a la superficie, de este modo $dS \cos \theta = dS'$, es la proyección del elemento de superficie sobre el plano normal al radio vector r.

Con la anterior interpretación matemática podemos comprender de inmediato el significado del teorema de Gauss en la forma que lo hemos escrito en la Ec. (2.7). La integración de $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ extendida a una superficie cerrada nos da el flujo o número de líneas neto que emergen a través de la superficie. (Las líneas que atraviesan la superficie hacia adentro tienen una contribución negativa al flujo puesto que θ es el ángulo entre la normal *exterior* y la dirección del campo.) El teorema de Gauss nos dice que el número *neto* de líneas que salen a través de una superficie cerrada depende exclusivamente de la carga total encerrada por la superficie (siendo el factor de proporcionalidad $1/\epsilon_0$). Por tanto, en la Ec. (2.7), $\sum_i q_i/\epsilon_0$ se refiere a todas las cargas q_i *interiores* al volumen limitado por la superficie a la que se extiende la integración.

La importancia del teorema de Gauss reside en el hecho de que la integral de superficie de $\mathbf{E}$ es igual al número de líneas de fuerza que salen *cualquiera que sea* la forma de la superficie cerrada, como vamos a demostrar ahora. Consideremos una superficie cerrada de forma arbitraria que rodea completamente una carga q_0 (Fig. 2.14), y en ella el elemento de superficie que subtiende un pequeño ángulo sólido $d\Omega$ en el punto ocupado por la carga. Sea r la distancia desde la carga al elemento de superficie. Haciendo uso de la Fig. 2.12, que podemos considerar como una ampliación de parte de la Fig. 2.14, puede escribirse el elemento de superficie dS' en función del ángulo sólido,

$$dS' = r^2 \, d\Omega = dS \cos \theta$$

Pero E_n, la componente normal del campo eléctrico, es $E \cos \theta$. Podemos escribir, por tanto, la Ec. (2.7) en la forma

$$\int_{SC} E \cos \theta \, dS = \frac{q_0}{\epsilon_0}$$

E, el campo debido a q_0 en el punto ocupado por dS, es igual a $1/4\pi\epsilon_0 \, q_0/r^2$, y como hemos visto anteriormente $dS = r^2 \, d\Omega/\cos \theta$. Combinando estas expresiones, encontramos

$$\int_{SC} E \cos \theta \, dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{SC} \frac{q_0}{r^2} r^2 \, d\Omega = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{SC} d\Omega$$

Pero la integral $\int d\Omega$ extendida a todo el espacio es 4π, cualquiera

que sea la forma de la superficie siempre que sea cerrada, de modo que hemos demostrado que el teorema de Gauss es válido para una carga puntual única. También resulta cierto para cualquier canti-

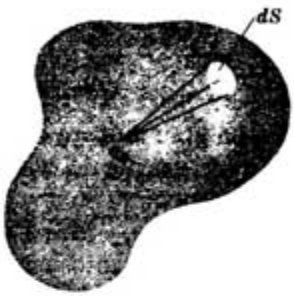


Fig. 2.14 Elemento de superficie dS abarcado por un pequeño ángulo sólido desde la carga q_0.

dad de carga distribuida en forma arbitraria dentro de la superficie. Esto se deduce si hacemos uso nuevamente de la relación entre el teorema de Gauss y el número neto de líneas de fuerza que salen de la superficie considerada. En efecto, este número depende únicamente del tamaño de cada carga q y no de su situación en el interior de la superficie, y el flujo neto de líneas hacia el exterior debe ser siempre igual a $\Sigma q/\epsilon_0$.

Una forma alternativa del teorema de Gauss, más útil en algunos casos, se obtiene al ponerlo en función de la densidad de carga ρ existente en el volumen limitado por la superficie cerrada.

$$\int_{SC} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_v \rho\, dV \tag{2.8}$$

donde dV es el elemento de volumen. La integral de volumen del segundo miembro nos da la carga total encerrada por la superficie, de modo que el significado en este caso es el mismo que antes.

Los conceptos físicos que encierra el teorema de Gauss son los mismos que los empleados cuando se hace uso de la idea de líneas

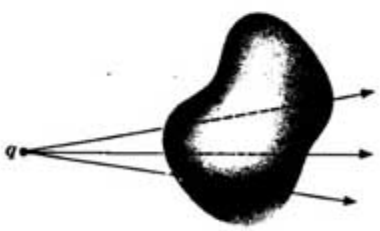


Fig. 2.15 El número neto de líneas que salen de un volumen determinado es cero si la carga que las origina es exterior al volumen. (El número de líneas que entran debe ser exactamente igual al número de las que salen.)

de fuerza. Tómese, por ejemplo, una superficie cerrada, que no rodea carga alguna, pero existiendo cargas fuera de ella. Desde cualquiera de los dos puntos de vista observamos que el número neto de líneas que surgen (número de las que salen menos el número de las que entran) de la superficie es cero (véase Fig. 2.15).

La utilidad del concepto de líneas de fuerza como ayuda para el razonamiento no implica su existencia física real. Constituyen un método gráfico de describir los hechos matemáticos que se siguen de la ley de proporcionalidad inversa con la distancia.

2.7 Ejemplos. Aplicaciones del teorema de Gauss

En un gran número de problemas el campo eléctrico puede calcularse directamente del teorema de Gauss. Son aquellos casos en los que puede encontrarse una superficie sobre la cual el campo es constante en módulo, y forma un ángulo constante con la superficie. Vamos a dar unos cuantos ejemplos.

a) Campo de una carga puntual. Se trata de un caso muy sencillo, pero de interés para ilustrar el procedimiento a seguir en situaciones más complicadas. Como se indica en la Fig. 2.16, se traza una

Fig. 2.16 Esfera, trazada alrededor del punto Q, para calcular el campo a una distancia r mediante el teorema de Gauss.

esfera de radio r alrededor de la carga puntual Q. Por simetría sabemos que el campo es el mismo en cualquier punto de esta superficie (y dirigido hacia afuera si Q es positiva). Empleando el teorema de Gauss,

$$\int_{SC} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

pero puesto que $\mathbf{E}$ es constante y normal a la superficie en todos sus puntos, de modo que $\cos\theta = 1$, podemos escribir

$$E = \frac{(1/\epsilon_0)Q}{\int_{SC} dS} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Otro hecho, que resulta ahora evidente, es que la configuración del campo en el *exterior* de una distribución esférica de carga, es equivalente exactamente al campo que resultaría si toda la carga estuviera concentrada en el centro. Esto puede demostrarse, bien como resultado del teorema de Gauss, bien razonando en términos de las líneas de fuerza. Como se indica en la Fig. 2.17, el número total de líneas de fuerza es el mismo en ambos casos, y puesto que

en ambos emergen uniforme y radialmente, la configuración de líneas y, por tanto, el campo exterior deben ser idénticos. Este razonamiento es válido para cualquier distribución con simetría esférica; lo que exige que la densidad de carga sea solamente función del radio.

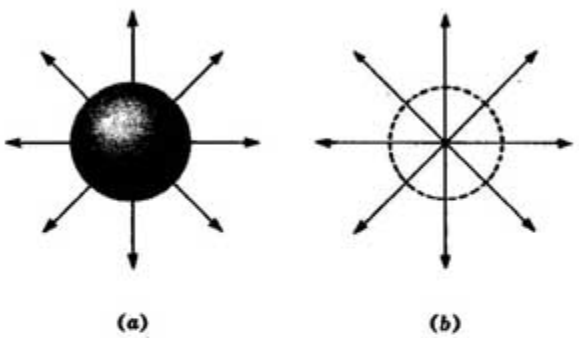


Fig. 2.17 (a) Líneas de fuerza alrededor de una distribución esférica de carga; (b) líneas de fuerza de una carga puntual.

b) Campo que rodea una distribución lineal uniforme de carga. Este es un problema ya considerado anteriormente que vamos a resolver ahora mediante el teorema de Gauss. Sea la densidad de carga μ culombios/m. Trácese un cilindro de radio r y longitud l alrededor de la carga, como indica la Fig. 2.18. Por simetría, todas las líneas de

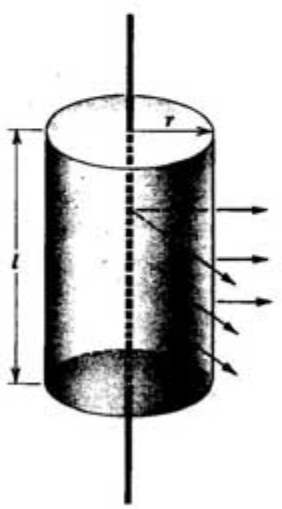


Fig. 2.18 Campo alrededor de una distribución lineal de carga, con algunas de las líneas de fuerza radiales. Superficie de Gauss cilíndrica de radio r.

fuerza salen radialmente. Por tanto, ninguna línea cruza las bases del cilindro, y la integral $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ sobre estas bases es cero. Sobre la superficie restante (lateral) el campo es uniforme y normal al

cilindro. Por tanto, podemos aplicar el teorema de Gauss escribiendo

$$\int_{SC} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{bases}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} + \int_{\text{superficie lateral}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\mu l$$

Como las bases del cilindro dan una contribución nula, tendremos

$$\int_{SC} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\mu l$$

que la integración se extiende a la superficie lateral del cilindro únicamente. Además, E es uniforme en toda ella, y podemos escribir

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\mu l}{\int dS} = \frac{\mu l}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0 r}$$

como antes hemos hallado.

c) Campo de un plano indefinido uniformemente cargado. Sea σ culombios/m^2 la densidad superficial de carga. Trácese una superficie en forma de cilindro corto, de sección transversal A como indica la Fig. 2.19. La carga contenida en su interior será σA, y por simetría

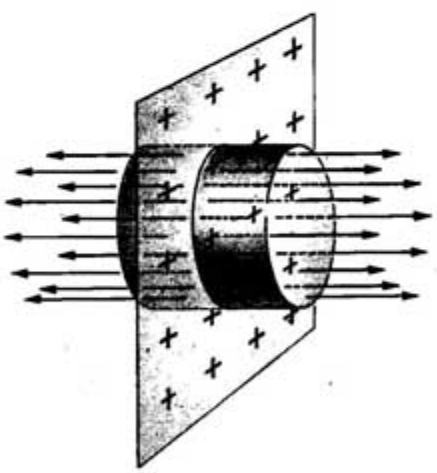


Fig. 2.19 Cálculo del campo de una distribución plana y uniforme de carga. Superficie de Gauss apropiada para este caso.

no habrá flujo saliente por la superficie lateral del cilindro (esto es, $\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0$ sobre esta parte de la superficie). Solo contribuyen las bases del cilindro, con lo que encontramos

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\sigma A}{2A} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Este resultado es idéntico al de nuestros cálculos anteriores en el Ejemplo 2.3*d*, en el que el campo se obtuvo por integración directa de las contribuciones de cada elemento de carga. Frecuentemente el teorema de Gauss proporciona una solución mucho más breve en estos casos de elevada simetría.

Examinemos ahora con más detalle el empleo del teorema de Gauss y de la integración directa en algunos problemas de distribuciones planas de carga en presencia de conductores. En primer lugar, veamos el caso indicado en la Fig. 2.20*a* de un plano conductor con una densidad superficial de carga σ' culombios/m^2 en cada uno de sus lados. Calculemos el campo en el punto P realizando la suma vectorial de las contribuciones de cada carga. Partiendo del resultado del Ejemplo 3.2*d* para la contribución de un plano cargado, encontramos que el campo en P, debido a la carga superficial de la cara derecha, es $E_1 = \sigma'/2\epsilon_0$. Análogamente, la cara de la izquierda produce otro campo de la misma dirección $E_2 = \sigma'/2\epsilon_0$. La suma de ambos es $E = E_1 + E_2 = \sigma'/\epsilon_0$. Nótese que al deducir este resultado hemos tomado en consideración *todas* las cargas.

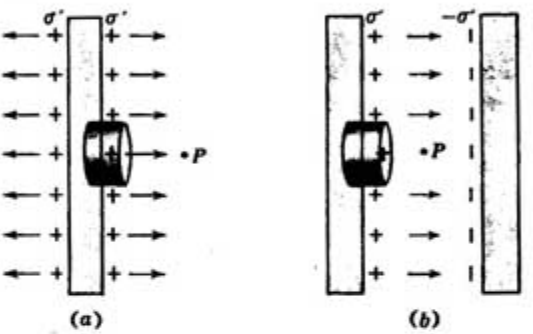


Fig. 2.20 Campo eléctrico en las proximidades de distribuciones de carga sobre conductores planos. (a) Conductor plano cargado uniformemente. (b) Dos conductores planos y paralelos, con cargas opuestas.

Vamos ahora a alcanzar el mismo resultado aplicando el teorema de Gauss. Tracemos la superficie gaussiana como se indica en la figura; en este caso las líneas de fuerza emergen únicamente por la base de la derecha del cilindro puesto que dentro de la placa metálica el campo es nulo y, por tanto, no puede haber líneas de fuerza. El teorema de Gauss nos da entonces

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\sigma' A}{A} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

de acuerdo con el cálculo directo. En este procedimiento no se han tenido en cuenta explícitamente las cargas existentes en la cara de la izquierda del metal. Sin embargo, es la presencia de cargas en esta cara izquierda la que hace que el campo sea cero en el interior de la placa. En efecto, el campo en el interior del metal es la suma de los

dos campos iguales y opuestos debidos a las cargas de las dos caras y, por tanto, igual a cero.

Consideremos ahora el par de placas conductoras dibujado esquemáticamente en la Fig. 2.20*b*, en la que suponemos que la separación entre las placas es mucho menor que sus dimensiones, de modo que vistas desde el punto P pueden considerarse como planos indefinidos. En este caso, las fuerzas atractivas entre las cargas de signos opuestos dibujadas, hacen que todas las cargas se sitúen sobre las superficies internas como se ha indicado en la figura. Suponemos densidades de carga iguales $\pm\sigma'$. Calculemos primero, igual que hicimos antes, el campo en P por suma directa de contribuciones, es decir, aplicando la Ec. (2.2). Usando el resultado anteriormente obtenido, la contribución de las cargas positivas de la placa de la izquierda es $E_1 = \sigma'/2\epsilon_0$. Las cargas negativas situadas sobre la placa de la derecha dan un campo igual, $E_2 = \sigma'/2\epsilon_0$, de igual dirección y sentido. El campo total es, pues, $E = E_1 + E_2 = \sigma'/\epsilon_0$.

A fin de resolver el mismo problema mediante el teorema de Gauss, tracemos la superficie gaussiana en la placa de la izquierda por ejemplo, y puesto que las líneas de E son paralelas entre sí y perpendiculares a las placas, encontramos para el campo en el punto P,

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\sigma' A}{A} = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$$

En este cálculo, la distribución de carga negativa sobre la placa de la derecha no se ha hecho intervenir explícitamente, aunque naturalmente su presencia es la que determina el desplazamiento de las cargas positivas del conductor a uno solo de sus lados. Naturalmente se encontraría el mismo resultado si se aplicara el teorema de Gauss a las cargas negativas únicamente. De nuevo, la cancelación de los campos uniformes iguales y opuestos, debidos a las dos distribuciones planas de carga, es lo que hace que el campo sea cero en el interior de las placas.

El resultado general es que el campo es uniforme en la región vecina a una distribución plana y uniforme de carga, y vale $E = \sigma/2\epsilon_0$, pero que, si las cargas están sobre la superficie de un conductor, el campo vale $E = \sigma/\epsilon_0$; el factor 2 procede de la ausencia de campo dentro del conductor.

d) Campo en el interior de un conductor hueco. La precisión experimental con que se conoce la ley de Coulomb es notablemente grande. Esta situación tan satisfactoria proviene de los experimentos realizados en el interior de conductores huecos. Resulta ser que el campo en el interior de un conductor hueco es cero si, y solo si es

exactamente 2 el exponente de la distancia en la ley de atracción entre cargas.

Tomemos el caso particular de una esfera conductora hueca. Hemos de demostrar que el campo, debido a la densidad de carga σ existente en la superficie, es cero en cualquier punto C dentro de la esfera (Fig. 2.21). No podemos invocar el concepto de líneas de fuer-

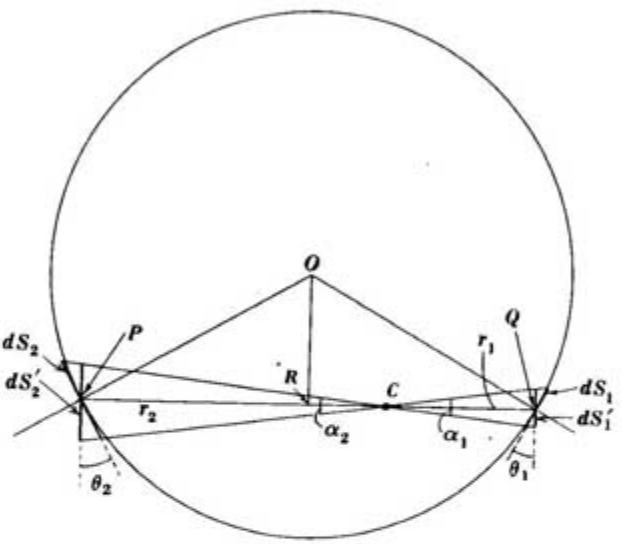


Fig. 2.21 Construcción gráfica para demostrar la ausencia de campo eléctrico en el interior de un conductor esférico hueco.

za ni cualquier otra consecuencia de la ley de Coulomb, puesto que esto es precisamente lo que deseamos probar. En virtud de la simetría podemos, sin embargo, admitir una distribución uniforme de carga sobre la superficie esférica. El campo en C se obtiene realizando la suma vectorial en el punto considerado de todas las contribuciones. Empezaremos por tomar en cuenta las contribuciones de las cargas $\sigma\, dS_1$ y $\sigma\, dS_2$ que abarcan los ángulos sólidos infinitesimales α_1 y α_2 iguales y opuestos. Por las propiedades de los ángulos sólidos sabemos que

$$\frac{dS_2 \cos\theta_2}{{r_2}^2} = \frac{dS_1 \cos\theta_1}{{r_1}^2}$$

Además, para ángulos sólidos pequeños $\theta_1 = \theta_2$.[1] Por tanto,

$$\frac{dS_2}{{r_2}^2} = \frac{dS_1}{{r_1}^2}$$

[1] Esto puede demostrarse como sigue: dS_1' y dS_2' son perpendiculares a la recta PQ. Trácese la mediatriz $OR \perp PQ$, que será bisectriz del ángulo POQ.
$\therefore \theta_2 = \angle\, ROP$, $\theta_1 = \angle\, QOR$.
$\therefore \theta_1 = \theta_2$.

o sea

$$\frac{\sigma\, dS_2}{{r_2}^2} = \frac{\sigma\, dS_1}{{r_1}^2}$$

Si se cumple la ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia, las componentes del campo en C son precisamente

$$dE_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\, dS_1}{{r_1}^2} \qquad \text{y} \qquad dE_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\, dS_2}{{r_2}^2}$$

y tienen sentidos opuestos. Vemos, pues, que, para aquella parte de la distribución de carga superficial comprendida por ángulos sólidos elementales iguales y opuestos, las contribuciones al campo total se compensan dando un valor neto de cero. Como el resto de la supercie esférica puede ser dividido análogamente en áreas subtendidas por pares de ángulos sólidos iguales y opuestos, se deduce que la contribución total al campo en C es cero, si la ley de Coulomb es correcta.

La prueba experimental de todo esto, tal como fue desarrollada por Maxwell, consiste en colocar una esfera conductora dentro de otra concéntrica y aislada de ella. Partiendo de la situación en que no exista carga sobre ninguna de las esferas, se comunica una gran carga a la esfera exterior, y se intenta medir el campo que pueda existir en el espacio situado entre las dos esferas. Como veremos en el capítulo siguiente, si existiera un campo radial entre las esferas, aparecería una *diferencia de potencial* entre ellas. La diferencia de potencial será cero únicamente si *no hay campo alguno* en el interior de la esfera mayor. No se encontró ninguna diferencia de potencial, y Maxwell fue capaz de establecer en sus experimentos que el exponente 2 en la ley de Coulomb tenía una exactitud de al menos 1 parte en 21.600. Los experimentos modernos basados en los mismos principios han elevado esta precisión a 1 parte en 10^9.

PROBLEMAS

2.1 Ocho cargas puntuales iguales de Q culombios cada una están situadas en los vértices de un cubo cuyas aristas tienen 10 cm de longitud.
   a) Calcular el campo eléctrico en el centro del cubo.
   b) Calcular el campo eléctrico en el centro de una de las caras del cubo.
   c) Calcular el campo en el centro del cubo si se quita una de las cargas de los vértices.

2.2 En el centro de una esfera de 2 m de radio existe una carga de Q culombios.
   a) ¿Cuántas líneas de fuerza se originan en la carga?

b) ¿Cuántas líneas de fuerza salen a través de un área de $^1/_2$ m^2 de la superficie esférica?
c) ¿Cuál es la densidad de líneas de fuerza para un campo eléctrico unidad?
d) ¿Cuál es el campo sobre la superficie esférica?

2.3 En un cierto volumen entran cinco mil líneas de fuerza y salen tres mil. ¿Cuál es la carga total en culombios existente en el interior de dicho volumen?

2.4 De una superficie esférica salen las líneas de fuerza radialmente y sobre ella tienen una densidad constante. ¿Cuáles son las posibles distribuciones de carga en su interior?

2.5 Un anillo circular delgado de 20 cm de radio está cargado con una densidad uniforme de μ culombios/m. Si se quita una pequeña parte del anillo de 1 cm de longitud, calcúlese la intensidad del campo eléctrico en el centro del anillo.

2.6 Un disco circular de 10 cm de radio está cargado uniformemente con una carga total de Q culombios. Encontrar la intensidad del campo eléctrico en un punto situado a 20 cm del disco y sobre el eje del mismo.

2.7 En el interior de una esfera de 20 cm de radio existe distribuida uniformemente una carga total de Q culombios. Calcular la intensidad del campo eléctrico:
a) En el centro de la esfera.
b) En un punto a 10 cm del centro de la esfera.
c) En un punto de la superficie de la esfera.
d) En un punto a 50 cm del centro de la esfera.

2.8 A lo largo de una varilla de 40 cm de longitud se encuentra distribuida uniformemente una carga total de Q culombios. Calcular la intensidad del campo eléctrico a 20 cm de distancia de la varilla sobre el plano bisector, como se indica en la Fig. P 2.8.

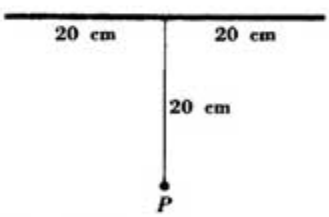


Fig. P 2.8

2.9 Una varilla en forma de semicircunferencia, como indica la Fig. P 2.9, está cargada uniformemente con una carga total de Q culombios. Calcular la intensidad del campo eléctrico en el centro de curvatura.

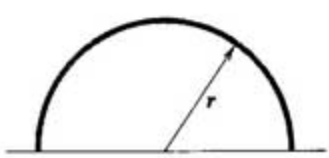


Fig. P 2.9

2.10 Dos cargas puntuales idénticas de $+Q$ culombios están separadas por una distancia de 10 cm, tal como se indica en la Fig. P 2.10. Calcúlese el trabajo por unidad de carga necesario para traer otra carga desde un punto muy alejado, y sobre el plano bisector de la línea que une las cargas, hasta el punto medio de dicha recta.

Fig. P 2.10

2.11 Si una de las dos cargas del Prob. 2.10 se cambia de $+Q$ a $-Q$, calcular el trabajo por unidad de carga para llevar otra carga al mismo punto que en el Prob. 2.10.

2.12 Un dipolo, que tiene un momento dipolar $p = Qa$ culombios-m, forma un ángulo θ con la dirección de un campo eléctrico uniforme E, como se indica en la Fig. P 2.12.

a) Calcular el par que actúa sobre el dipolo.

b) Calcular el trabajo necesario para invertir la orientación del dipolo desde su posición de equilibrio, paralelo al campo, a la opuesta.

c) Calcular el periodo de oscilación, para pequeñas amplitudes alrededor de su posición de equilibrio, si el dipolo tiene un momento de inercia I alrededor de su centro.

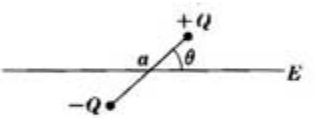


Fig. P 2.12

2.13 Un dipolo de momento $p = Qa$ está alineado paralelamente a un campo eléctrico a lo largo del eje x. El campo no es uniforme y varía linealmente a lo largo del eje x, siendo $dE/dx = K$. Calcúlese la fuerza que actúa sobre el dipolo.

2.14 Un par de dipolos eléctricos dispuestos como se indica en la Fig. P 2.14 se denomina *cuadrupolo*. Encontrar el valor del campo eléctrico en un punto P, situado sobre el eje del cuadrupolo, a una distancia r ($r >> a$) de su centro.

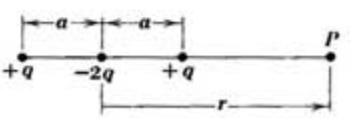


Fig. P 2.14

2.15 Una sustancia aislante de forma hemisférica y radio R lleva distribuida uniformemente sobre su superficie curva una carga Q. Calcular el campo eléctrico en el centro de la superficie plana que limita el hemisferio.

2.16 Considérese que en el interior de una esfera de radio R existe distribuida una carga Q con una densidad

$$\rho = A(R - r) \qquad 0 < r < R$$

estando dada ρ en culombios por metro cúbico. Determínese la constante A en función de Q y R. Calcúlese el campo eléctrico en el interior y en el exterior de la esfera.

TRES

El Potencial Eléctrico

3.1 Introducción

Ahora que ya hemos discutido la ley de Coulomb sobre la fuerza entre cargas introduciendo el campo eléctrico, estamos en condiciones de avanzar un paso más que simplifica muchas consideraciones. Al igual que en el estudio de la mecánica, resulta útil con frecuencia el razonar en términos del *trabajo* realizado por las fuerzas eléctricas, y, además, también sucede que muchas veces el concepto de *energía potencial* constituye una valiosa ayuda para comprender el comportamiento de las cargas eléctricas. Este capítulo está dedicado a desarrollar las nuevas ideas que necesitaremos, y a ilustrar alguna de las formas de usarlas.

3.2 Integral de línea. Trabajo

En mecánica, el concepto de *integral de línea* presenta una gran importancia en los problemas sobre trabajo. Su importancia es igualmente grande en electrostática, por lo que vamos a recordarlo aquí brevemente. En la Fig. 3.1 se esquematiza la idea simple de que el trabajo realizado sobre un cuerpo, depende de la componente de

la fuerza que actúe en la dirección del movimiento multiplicada por la distancia recorrida. En forma diferencial, el trabajo elemental es

$$dW = F \cos \theta \, dl$$

siendo dl el elemento de longitud a lo largo de la dirección de movi-

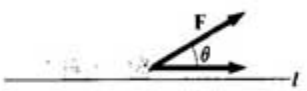


Fig. 3.1 Integral de línea para el cálculo del trabajo. Trabajo elemental $dW = F \cos \theta \, dl$.

miento y F la fuerza que actúa sobre el cuerpo. Para un movimiento finito, el trabajo será

$$W = \int_A^B (F \cos \theta) \, dl$$

En la que integramos de A a B, el principio y el fin de la trayectoria. En notación vectorial, tendremos

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.1}$$

Es este otro ejemplo del empleo del producto escalar, que vimos en la Sec. 2.6, en donde se aplicó a una integral de superficie. La situación física aquí es completamente diferente; la integral en el caso del trabajo ha de hacerse a lo largo de una trayectoria; no hay, por tanto, posibilidad de confusión.

Las integrales de línea y los conceptos de trabajo y energía son muy útiles cuando se trata de sistemas *conservativos*. Vamos a recordar como ejemplo, el caso del campo gravitatorio terrestre, un campo vectorial constituido por la fuerza sobre la unidad de masa en cada punto del espacio. Se dice que el campo es conservativo porque en él se conserva la energía asociada con la posición. Así el trabajo que es necesario para levantar un cuerpo es independiente del camino seguido, y, además, podemos recuperar toda la energía invertida permitiendo que el cuerpo vuelva a su punto de partida. Esta energía almacenada en virtud de la posición ocupada se llama energía potencial.

El requisito para que un sistema sea conservativo es precisamente que la energía potencial de un cuerpo en el campo quede definida exclusivamente por su posición. Este requisito se cumple si el trabajo exterior necesario para mover un cuerpo de un punto

a otro es independiente del camino seguido entre los dos puntos. Sólo con esta condición será único el trabajo necesario para llevar el cuerpo a una posición determinada desde un punto de referencia, y, por tanto, solo en este caso, quedará la energía potencial definida unívocamente. Vamos a demostrar que cualquier posible distribución espacial del campo eléctrico debido a cargas en reposo, constituye un campo conservativo. Esta es la razón por la cual el empleo de los conceptos de energía y trabajo es tan natural en electrostática como en mecánica.

La ley de Coulomb, que nos da la fuerza entre cargas eléctricas, conduce a un campo conservativo. Para demostrarlo, empecemos por el caso de una carga Q, fija en un punto dado, como se indica en la Fig. 3.2. Calculemos el trabajo *externo* que debe realizarse

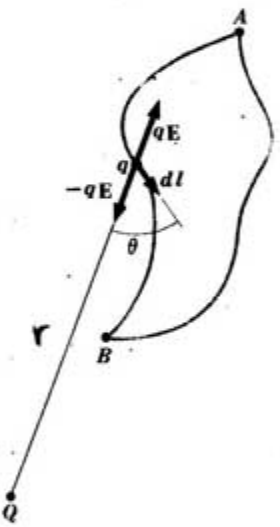


Fig. 3.2 Integral curvilínea para el cálculo del trabajo exterior realizado, contra el campo de una carga puntual Q, al mover otra carga desde A a B. En un campo conservativo el trabajo realizado por caminos diferentes es el mismo. La fuerza exterior vale $-q\mathbf{E}$.

sobre otra carga q para moverla en forma *cuasi-estática* desde el punto A al punto B. Un proceso cuasi-estático sería aquel en el que la fuerza ejercida solo difiere infinitesimalmente en módulo de la fuerza debida al campo, y tiene la misma dirección, y sentido opuesto que ella. Por consiguiente, el movimiento del cuerpo es el resultado de una fuerza neta infinitesimal, de modo que el cuerpo llegará a su nueva posición B sin energía cinética. De este modo nos evitamos tener en cuenta energías cinéticas. Calculemos el trabajo exterior necesario para mover la carga q a lo largo de una distancia infinitesimal dl, y después, integremos esta expresión a toda la trayectoria, desde A a B, para obtener el trabajo total realizado. La fuerza debida al campo de Q sobre la carga q es $q\mathbf{E}$; por tanto, la fuerza exterior requerida será $\mathbf{F} = -q\mathbf{E}$. Llamaremos θ al ángulo que forma esta fuerza con el elemento de longitud dl. El trabajo realizado

al recorrer dl será, pues, $dW = F \cos\theta\, dl$, y el trabajo exterior total desde A a B

$$W = \int_A^B F \cos\theta\, dl = -q \int_A^B E \cos\theta\, dl$$

En la figura vemos que $\cos\theta\, dl = dr$, la variación de la distancia mutua r entre las dos cargas cuando q se desplaza a lo largo de dl. Sustituyendo esta expresión y la de E que nos da la ley de Coulomb, tenemos

$$W = -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{1}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Este resultado nos muestra que el trabajo necesario para mover q desde A a B es independiente del camino escogido y depende únicamente de las posiciones de A y B. Hemos probado de este modo que el campo de una carga puntual es conservativo. Como consecuencia cualquier configuración del campo, formada por superposición de los campos de una distribución arbitraria de cargas puntuales, será también un campo conservativo. Esto es cierto por ser el trabajo una magnitud escalar, por lo que el trabajo total realizado para mover la carga q desde A a B, contra los campos creados por una distribución cualquiera de cargas, será la suma de varios términos parciales como el que hemos calculado para el campo de la carga puntual Q. Por ser cada término independiente del camino seguido, es evidente que la suma de todos ellos también lo será.

Expresaremos este resultado matemáticamente escribiendo el trabajo externo en la forma

$$W = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Como q es constante, la condición que resulta de nuestra demostración es que

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \text{cte} \tag{3.2}$$

Esta integral es independiente del camino seguido entre A y B, para el campo electrostático creado por una distribución cualquiera de cargas. Una afirmación equivalente del carácter conservativo del campo electrostático es:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{3.3}$$

esto es, que la integral curvilínea a lo largo de una trayectoria *cerrada* es igual a cero. Esto se deduce de modo inmediato si llevamos

una carga q desde A a B y después la devolvemos a A siguiendo un camino diferente, tal como se indica en la Fig. 3.2. El trabajo realizado al volver de B a A debe ser exactamente igual y de signo opuesto al realizado de A a B, de modo que el trabajo total en cualquier trayectoria cerrada debe ser cero en un proceso cuasi-estático.

3.3 Energía potencial

Cuando tenemos un campo conservativo, como acabamos de ver que ocurre en un campo electrostático, resulta útil definir la energía potencial de una carga. Como el trabajo para colocarla en una posición determinada es independiente del camino seguido, la energía potencial es solo función de la posición. En términos matemáticos podemos escribir que la diferencia de energía potencial de una carga q, cuando está situada en A y en B, es

$$PE_B - PE_A = -\int_A^B q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{3.4}$$

Si se utilizan unidades mks el trabajo vendrá dado en julios.

Esta expresión permite calcular el trabajo exterior necesario para mover la carga desde A a B contra la acción de las fuerzas eléctricas. Debido a su forma, solo podrán conocerse *diferencias* de energía potencial. No tiene sentido hablar de valores absolutos.

Finalmente, debemos resaltar el hecho de que de esta forma hemos desarrollado un nuevo tipo de descripción para el campo. Ya habíamos visto que podemos describir la situación mediante un *vector campo eléctrico* **E**, que nos da en magnitud y dirección la fuerza por unidad de carga en cada punto del espacio. Pero ahora somos capaces de describir la misma situación física por medio de una magnitud *escalar*, la cantidad de trabajo necesaria para colocar una carga dada en un punto del espacio. En lo que sigue encontraremos aplicaciones importantes de las relaciones que deben existir entre ambos tipos de descripción.

3.4 Diferencia de potencial y potencial

Resulta conveniente expresar las diferencias de energía potencial referidas a la *unidad* de carga positiva. Así, pasando q al primer miembro de la Ec. (3.4),

$$\frac{PE_B - PE_A}{q} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad \text{julios/culombios} \tag{3.5}$$

Esta magnitud se llama *diferencia de potencial* entre los puntos A y B, y su unidad es el *voltio*, tanto en el sistema mks como en el prác-

tico (véase Cap. 15). La diferencia de potencial suele escribirse $V_B - V_A$ o V_{AB}. Nótese que tanto **E** como V se refieren a efectos sobre la unidad de carga; el campo eléctrico **E** da la fuerza por unidad de carga, y la diferencia de potencial V_{AB} el trabajo necesario para mover una carga unidad de un punto a otro. Para operar con rigor, deberemos usar también aquí la forma diferencial,

$$V_{AB} = \frac{d(PE_B - PE_A)}{dq}$$

con objeto de evitar cualquier efecto perturbador de una carga de prueba finita sobre la distribución de cargas original.

Aunque únicamente tiene significado fundamental la diferencia de potencial entre dos puntos, resulta conveniente con frecuencia elegir (arbitrariamente) un punto de referencia de potencial cero, el infinito. Cuando se hace así, el *potencial* V en un punto dado es por definición el trabajo necesario para llevar la unidad de carga desde el infinito al punto en cuestión. Por tanto, el potencial en el punto P vendrá dado por

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \tag{3.6}$$

El *potencial* en un punto es la diferencia de potencial entre dicho punto y el punto del infinito.

Por estar la diferencia de potencial relacionada con la integral curvilínea de **E**, existe una relación gráfica sencilla entre V y **E**. Vamos a demostrarlo en el caso del campo alrededor de un estrato esférico de carga, como indica la Fig. 3.3. Bajo el esquema de la carga, se ha dibujado una gráfica de la variación de E con la distan-

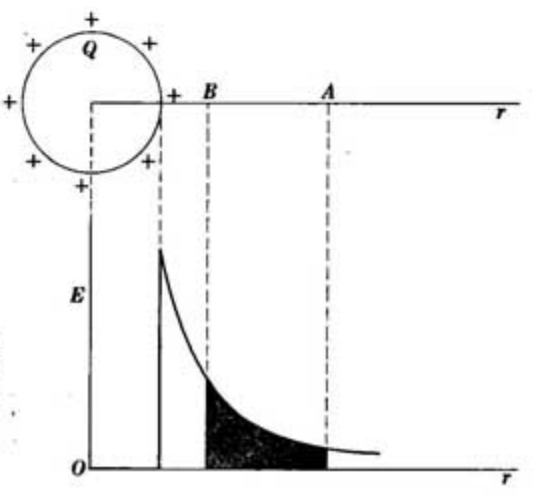


Fig. 3.3 Gráfica del campo eléctrico de una distribución uniforme de carga sobre una superficie esférica. El área bajo la curva de E entre los puntos A y B mide la diferencia de potencial entre esos dos puntos.

cia. De la Ec. (3.5) se deduce que la diferencia de potencial entre los puntos A y B es sencillamente el área bajo la curva de E frente a r, comprendida entre las ordenadas r_A y r_B. El potencial de un punto situado sobre la superficie de la esfera cargada es precisamente el área bajo la curva de E desde el infinito a esta superficie. En este caso sencillo, **E** tiene la dirección del camino que seguimos entre A y B. En los casos en que esto no se cumpla, debe tenerse en cuenta el ángulo que forme el campo con la trayectoria, tal como exige el producto escalar que aparece en la integral curvilínea. Por ejemplo, si una trayectoria rectilínea trazada entre los puntos A y B forma un ángulo constante θ con la dirección del campo, la diferencia de potencial vendrá dada por el área bajo la curva $E \cos\theta$ frente a r entre los dos puntos.

3.5 Ejemplos. Cálculo de potenciales

a) Diferencia de potencial entre dos puntos en la vecindad de una carga puntual Q (Fig. 3.4). Como ya sabemos

$$V_{AB} = V_B - V_A = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} \qquad (3.5)\ \text{Bis}$$

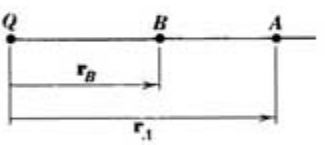


Fig. 3.4 Cálculo de la diferencia de potencial entre los puntos A y B debida a la carga puntual Q.

Pero **E** a la distancia **r** de la carga puntual Q es, según la ley de Coulomb, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, y **E** está dirigido según **r** por lo que el cos θ correspondiente al producto escalar es 1, por tanto

$$V_{AB} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) \quad \text{julios/culombios, o voltios}$$

b) Potencial de un punto situado a una distancia r de una carga puntual Q. El potencial representa como vimos el trabajo por unidad de carga necesario para llevar la carga de prueba desde el infinito hasta P. Para calcularlo, haremos uso del resultado del problema anterior. Sea el punto P el B y hagamos que $A \to \infty$. Nos queda que el potencial en el punto P, a r metros de la carga puntual,

es $V_P = Q/4\pi\epsilon_0 r$. Por tanto, el potencial debido a una carga puntual disminuye como $1/r$. Que el potencial posee simetría esférica alrededor de la carga puntual se deduce de la simetría análoga que tiene el campo eléctrico. El resultado $V_P = Q/4\pi\epsilon_0 r$ es también válido para el potencial en el exterior de cualquier distribución esférica de carga, de acuerdo con los argumentos dados en el Ejemplo 2.7*a*.

c) Potencial debido a varias cargas puntuales. Supongamos que vamos a calcular el potencial en el origen, debido a las cargas q_1,

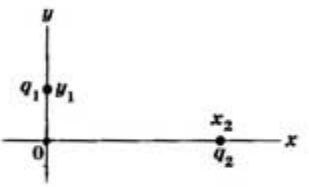


Fig. 3.5 Cálculo de potencial en 0 debido a varias cargas puntuales. El potencial es la suma escalar de las contribuciones de cada carga.

situada en y_1, y q_2, situada en x_2, como se indica en la Fig. 3.5. Usando los resultados del Ejemplo 3.5*b*, escribiríamos directamente

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q_1}{y_1} + \frac{q_2}{x_2}\right) \quad \text{voltios}$$

puesto que el potencial es una magnitud escalar. Por tanto, la expresión general del potencial debido a una distribución de cargas puntuales es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad \text{(suma escalar)} \tag{3.7}$$

Si la distribución es continua,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{\text{vol}} \frac{\rho\, dv}{r} \tag{3.8}$$

en donde ρ = densidad de carga, culombios/m^3.
dv = elemento de volumen
r = distancia del elemento al punto en cuestión.

d) Diferencia de potencial entre dos puntos en las proximidades de una recta indefinida uniformemente cargada. Procederemos como antes, haciendo uso del resultado anterior (Ejemplo 2.3*b*), de que

el campo viene dado por $E = \mu/2\pi\epsilon_0 r$. Así, pues, si B es el punto más próximo a la recta cargada, escribiremos

$$V_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0}\int_A^B \frac{dr}{r} = \frac{\mu}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r_A}{r_B}$$

Sin embargo, si ahora intentamos calcular el potencial (respecto al ∞) haciendo que r tienda a ∞ como en el Ejemplo 2.3*b*, encontraríamos que V se hace infinito en todos los puntos de las proximidades de la distribución de cargas (en que r_B es finito). Esto es correcto y es debido a haber admitido la existencia de una carga total infinita, como resulta de una densidad de carga finita sobre una longitud infinita. La misma situación se presenta en el caso del potencial debido a un plano indefinido con una densidad de carga uniforme, que también da lugar a una carga total infinita. No obstante, como en los problemas prácticos estamos interesados en *diferencias* de potencial entre puntos a distancia finita y no en valores absolutos del potencial, esto no introduce dificultad alguna. La elección del infinito como punto de potencial cero fue arbitraria, de modo que cualquier problema que resolvamos haciendo uso del concepto de potencial debe conducir a la misma solución independientemente de nuestra elección de la referencia de potencial cero. En general, el potencial está definido solo salvo una constante arbitraria, de modo que únicamente tienen significado real las diferencias de potencial.

3.6 Relación entre potencial y campo eléctrico

Examinemos ahora con más detalle la relación entre el potencial y el campo eléctrico dada por la ecuación

$$V_{AB} = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \tag{3.5}$$

Tomemos en primer lugar la derivada de ambos miembros,

$$dV = -\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} \qquad \text{o} \qquad dV = -E\cos\theta\, dl$$

Por tanto,

$$\frac{dV}{dl} = -|\mathbf{E}|\cos\theta \tag{3.9}$$

Ahora bien, por ser $E\cos\theta$ la proyección de $\mathbf{E}$ sobre la dirección del elemento de longitud dl, esta ecuación nos dice que la rapidez de variación del potencial al movernos en una cierta dirección dl es igual, con signo cambiado, a la componente del campo eléctrico en esa dirección.

Vamos a escribir explícitamente esta relación en un sistema de coordenadas rectangulares. Supongamos que el vector campo en el

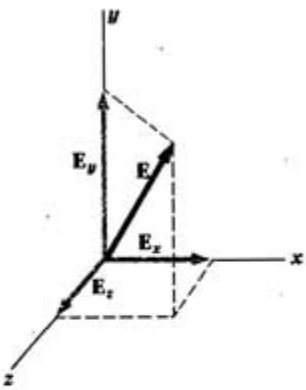


Fig. 3.6 Las componentes del campo pueden obtenerse a partir de la rapidez de variación del potencial según direcciones dadas.

origen está dirigido en una cierta dirección, tal como se indica en la Fig. 3.6. Las componentes del campo según los ejes serán, pues:

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

$$E_y = -\frac{dV}{dy}$$

$$E_z = -\frac{dV}{dz}$$

Por esto, la unidad de E puede llamarse newton por culombio, o igualmente bien, voltio por metro.

Si escogemos dl en la dirección del campo, el valor de dV/dl es máximo y exactamente igual a $|\mathbf{E}|$. Podemos indicar esto escribiendo

$$|\mathbf{E}| = -\left(\frac{dV}{dl}\right)_{\max} \tag{3.10}$$

Este valor máximo de la derivada de V en un punto dado se llama *gradiente* del potencial en ese punto.

Si en vez de esto nos movemos en dirección perpendicular a **E**, cos θ será cero, y, por tanto,

$$\frac{dV}{dl} = 0 \quad \text{o sea} \quad V = \text{cte}$$

Aquellas superficies para las que V = constante, se llaman *superficies equipotenciales*. De lo anterior se deduce que son en todos sus puntos perpendiculares a la dirección del campo eléctrico.

En la próxima sección vamos a ver ejemplos de la aplicación de estas ideas a algunos casos particulares.

3.7 Ejemplos. Cálculo de campos mediante el potencial

a) Campo de una carga puntual Q. Este caso tan sencillo y conocido nos servirá para introducir el método. Haciendo uso de la Fig. 3.7 y del resultado del Ejemplo 3.5*b*, escribiremos directa-

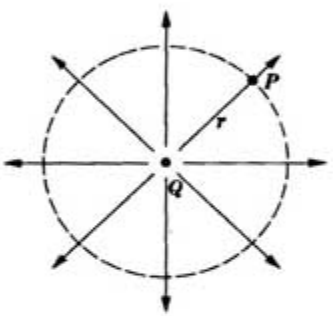


Fig. 3.7 El campo en P, debido a una carga puntual Q puede obtenerse por $-dV/dr$.

mente el potencial en un punto P situado a la distancia r de la carga Q:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

Ahora bien, como sabemos que el campo resultante es según la dirección de r, podemos escribir

$$|\mathbf{E}| = -\frac{dV}{dr} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \qquad \text{voltios/m}$$

de acuerdo con el resultado previo.

Como en este caso nos movemos a lo largo de r, que resulta ser la dirección de máximo cambio de V, dV/dr es el gradiente de V, o sea $-\mathbf{E}$.

Si escogemos para calcular la derivada de V una dirección perpendicular al radio, encontramos $dV/r\,d\theta = 0$, como podíamos esperar, puesto que el potencial tiene un valor constante cuando nos movemos en una dirección perpendicular a $\mathbf{E}$. Nótese que el elemento de longitud en esta dirección perpendicular a $\mathbf{r}$ viene dado por $r\,d\theta$.

b) Campo de un dipolo. Haciendo uso de la relación entre campo eléctrico y gradiente del potencial, vamos a ser capaces de encontrar el campo en un punto cualquiera en las proximidades de un dipolo. Observando la Fig. 3.8 podremos escribir directamente la expresión

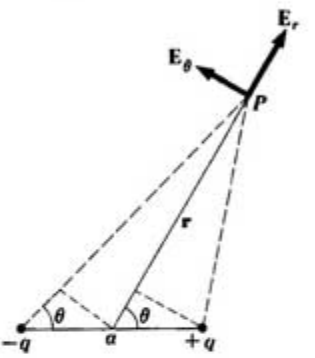


Fig. 3.8 Cálculo del potencial y del campo que rodea a un dipolo.

del potencial en el punto P, si utilizamos la correspondiente al potencial de una carga puntual:

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{q}{[r - (a/2)\cos\theta_1]} - \frac{q}{[r + (a/2)\cos\theta_2]}\right\}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{a\cos\theta}{[r^2 - (a^2/4)\cos^2\theta]}$$

En esta última expresión hemos hecho la aproximación de suponer $\theta = \theta_1 = \theta_2$. Cuando P está razonablemente lejos del dipolo, $r >> a$, y podemos despreciar el término en $a^2/4$ comparado con r^2. En estas condiciones la aproximación $\theta_1 = \theta_2$ es también válida. Finalmente, haciendo aparecer el momento dipolar, $p = qa$, tendremos

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^2}\cos\theta \tag{3.11}$$

Como no disponemos de una expresión que nos dé explícitamente la dirección de **E**, no podemos obtener de modo inmediato **E** como gradiente de V. Sin embargo, salvaremos esta dificultad obteniendo las componentes de **E** en dos direcciones perpendiculares. Así encontraremos

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3}\cos\theta$$

y

$$E_\theta = -\frac{\partial V}{r\,\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\operatorname{sen}\theta$$

Comparadas con nuestros resultados anteriores para $\theta = 0°$ y $90°$ estas expresiones concuerdan. Al igual que en el Ejemplo 3.7*a*, hemos utilizado $r\,d\theta$ para el elemento de longitud en dirección perpendicular a **r**.

3.8 Ecuaciones de Poisson y Laplace

La ley de Coulomb impone de forma específica el tipo de variación que el campo eléctrico puede sufrir al pasar de un punto a otro del espacio. Esto puede relacionarse con la naturaleza continua de las líneas de fuerza o con el teorema de Gauss. La forma exacta de estas condiciones está dada por las ecuaciones de Laplace y Poisson que se deducen en el Apéndice A. La ecuación de Laplace expresa la forma en que el potencial debe variar en una región del espacio que no contiene cargas, y la ecuación de Poisson hace lo mismo en regiones en las que existe una distribución de carga determinada.

3.9 Determinación de la carga del electrón

Nada hay en la teoría clásica de la Electricidad que exija la existencia de una carga elemental única. Así, pues, en la formulación final de las leyes fundamentales del electromagnetismo que veremos en el Cap. 12, no encontraremos ningún requisito para que deba existir un tamaño mínimo de carga que no pueda ser subdividido. Sin embargo, experimentalmente, se ha comprobado que la carga negativa del electrón (o la carga positiva equivalente del protón) constituye la unidad elemental de carga. No se conocen porciones menores. En el Cap. 6 estudiaremos unos experimentos que permiten determinar la relación e/m, entre la carga y la masa, para los electrones y diversos tipos de iones. Sin embargo, en la época en que se descubrió el electrón no existía ningún método para evaluar con precisión m, de modo que se presentaba la necesidad de un experimento para medir directamente la carga del electrón e. Los esfuerzos en este sentido de R. A. Millikan alcanzaron un resultado positivo en el periodo 1909-1913. En estos experimentos, se inyectaban gotitas de aceite muy pequeñas en el espacio comprendido entre dos placas horizontales, entre ellas existía un campo eléctrico que podía variarse ajustando la diferencia de potencial entre las placas. Se dispuso un microscopio de forma que pudiera observarse el movimiento vertical de las gotitas. Mediante una fuente de rayos X se conseguía ionizar las gotitas de aceite, comunicándoles una o varias unidades de carga. En el experimento eran necesarias dos etapas. La primera consistía en observar el movimiento de una gotita cargada por exposición a los rayos X y ajustar el valor del campo eléctrico para conseguir anular su movi-

miento de caída. En estas condiciones, la fuerza de origen eléctrico sobre la gota con n unidades de carga electrónica, neE, compensa exactamente la diferencia entre el peso de la gota y el empuje de Arquímedes debido al aire en el que las gotas están inmersas. Esta diferencia, el peso aparente, valdrá $^4/_3\pi r^3 g(\rho - \rho_a)$, siendo ρ la densidad del aceite, g la aceleración de la gravedad y ρ_a la densidad del aire. El radio r no podía ser medido con suficiente precisión por observación directa mediante el microscopio, pues las gotitas eran muy pequeñas (del orden de 10^{-4} cm), de modo que fue necesaria una segunda etapa para determinar el tamaño.

El método empleado para ello consistió en eliminar el campo eléctrico, estableciendo una conexión eléctrica entre las dos placas, y medir la velocidad límite de caída de las gotas. La ley de Stokes da esta velocidad límite de caída en un medio viscoso:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_a) = 6\pi\eta r v \tag{3.12}$$

donde η es la viscosidad del medio (aire) y v es la velocidad límite. Así, pues, tras determinar el campo eléctrico E, para el que una gota determinada se mantenía en equilibrio, con lo que

$$neE = \tfrac{4}{3}\pi r^3 g(\rho - \rho_a) \tag{3.13}$$

se calculaba el radio de la gota midiendo su velocidad de caída según la Ec. (3.12).

Haciendo un gran número de observaciones de este tipo, podía medirse la carga total ne de muchas gotitas. Los resultados obtenidos demostraron que en todos los casos la carga de una gota era un múltiplo entero de una carga determinada e, cuyo valor era

$$e = -1.602 \times 10^{-19} \text{ culombios}$$

Por tanto, en primer lugar, estos experimentos demostraron que la carga del electrón es única; en segundo lugar, daban su valor con gran precisión. La principal limitación a la precisión del experimento reside en las dificultades que presenta la determinación experimental de la viscosidad del aire.

3.10 El electrón-voltio

Como la diferencia de potencial V_{AB} da el trabajo por unidad de carga necesario para mover una carga entre dos puntos A y B, la

energía adquirida por una partícula cargada que es acelerada por el campo eléctrico entre estos dos puntos vendrá dada por

$$dU = qV_{AB} \qquad \text{culombios-voltios, o julios} \tag{3.14}$$

En muchos casos, se trata de partículas que poseen la carga del electrón e, de modo que resulta útil como unidad de energía el *electrón-voltio*. Representa la energía adquirida por una partícula, con carga igual a la del electrón, cuando es acelerada por una diferencia de potencial de un voltio. Como la carga electrónica es $1{,}602 \times 10^{-19}$ culombios, un electrón-voltio es, según la Ec. (3.14), igual a $1{,}602 \times 10^{-19}$ julios.

PROBLEMAS

3.1 Un dipolo de carga $\pm q$ y separación l (momento dipolar $p = ql$) está colocado a lo largo del eje x como se indica en la Fig. P 3.1.

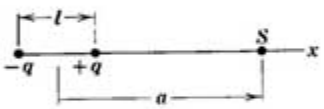


Fig. P 3.1

a) Haciendo uso de la expresión para el potencial V de una carga puntual, calcular el trabajo necesario para llevar una carga $+Q$ muy distante hasta un punto S situado sobre el eje x, a una distancia a del centro del dipolo. ¿Cuál es el potencial V_s del punto S (en ausencia de la carga Q)?

b) Escribir una expresión sencilla aproximada para V_s, válida para $a >> l$. Utilizar esta expresión para calcular en magnitud y dirección el valor del campo eléctrico en el punto S.

c) Hallar la orientación de la superficie equipotencial que pasa por el punto S.

3.2 Hallar, en la Fig. P 3.1, una superficie equipotencial que sea un plano. Calcular el valor del potencial sobre este plano.

3.3 En todo el volumen de una esfera de radio R existe una densidad de carga uniforme de ρ culombios/m^3. Hallar las expresiones del potencial V y del campo eléctrico E para puntos interiores y exteriores de la esfera, en función de la distancia r a su centro.

3.4 Calcular el trabajo necesario para mover una carga q desde un punto A a otro punto B en el campo de una carga puntual Q, como se indica en la Fig. P 3.4.

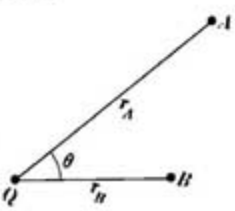


Fig. P 3.4

3.5 El campo eléctrico máximo que puede mantenerse en el aire (sin que se produzca ionización y, por tanto, se haga conductor) es de alrededor de 10^6 voltios/cm. Con este criterio calcular el potencial máximo a que puede cargarse una esfera metálica de $R = 10$ cm rodeada de aire.

3.6 Una esfera conductora de radio R está aislada de cualquier otro cuerpo. Expresar el potencial de la superficie de la esfera en función de la carga situada sobre ella. Integrar esta expresión para determinar el trabajo necesario para cargar la esfera hasta que su potencial sea V.

3.7 Un conductor esférico de radio a tiene una carga Q_1. Se encuentra en el interior de una esfera conductora hueca de radio b, tal como se indica en la Fig. P 3.7. Esta última se halla conectada a tierra a través de una batería de diferencia de potencial V_1.

a) Calcular la carga total sobre la superficie exterior de la esfera hueca y sobre su superficie interior.

b) Hallar la expresión del campo y del potencial a una distancia r del centro de las esferas, siendo $r < a$, $a < r < b$ y finalmente $r > b$.

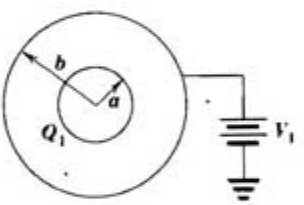


Fig. P 3.7

3.8 ¿Cuál es la velocidad de un electrón que ha sido acelerado a través de una diferencia de potencial de 100 voltios? ¿Cuál es su energía en julios? Expresar esta energía en ergios y en electrón-voltios.

3.9 Un cilindro muy largo de radio a tiene una carga de Q culombios/m. Hallar la diferencia de potencial entre dos puntos situados a distancias r_1 y r_2 del eje del cilindro.

3.10 La gráfica de la Fig. P 3.10 indica la forma en que varía el potencial a lo largo del eje x. Trazar una curva de la componente del campo eléctrico E_x según dicho eje. Explicar por qué las dos áreas obtenidas en esta representación deben tener valores iguales.

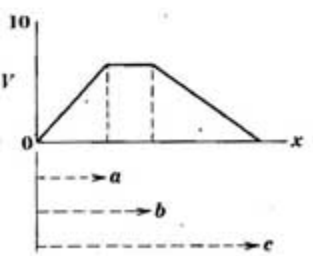


Fig. P 3.10

3.11 Algunos de los electrones que son emitidos con poca velocidad por un filamento incandescente (cátodo) atraviesan un pequeño orificio en una placa

que está a un potencial de 1000 voltios con respecto al cátodo. ¿Cuál será la velocidad de estos electrones cuando están pasando por el orificio? Paralela a la primera existe una segunda placa 20 cm más allá, que tiene un potencial de -2000 voltios con respecto al cátodo. Describir el movimiento de los electrones en la región comprendida entre las placas.

3.12 Un haz de electrones, acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de V_0 voltios (que tienen, por tanto, una energía de eV_0 electrón-voltios), entra en la región entre dos placas paralelas que distan d cm y tienen una longitud b, región en la que se ha hecho el vacío. Como se indica en la Fig. P 3.12, los electrones entran a igual distancia de las placas, entre las que existe una diferencia de potencial V_1. Calcular el valor de V_1 para el cual los electrones salen exactamente rozando el borde de la placa. Supóngase que $d << b$.

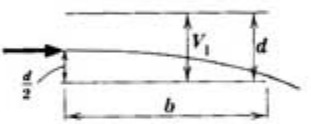


Fig. P 3.12

3.13 Dos gotas de agua idénticas están cargadas al mismo potencial V_1. Hallar el nuevo potencial si las dos gotas se juntan en una sola.

3.14 Considérese una carga puntual q situada a una distancia a de un plano conductor, como se indica en la Fig. P 3.14. Como las líneas de fuerza han de terminar en el plano, se inducen cargas sobre él. Se desea calcular la fuerza que estas cargas inducidas ejercen sobre la carga q. Existe un método muy sencillo para conseguirlo si hacemos uso del teorema de unicidad, mencionado en el Apéndice B, que establece que cualquier solución de un problema electrostático que satisfaga la ecuación de Laplace y las condiciones en los límites es la única solución posible. Por tanto, si imaginamos una carga *imagen* de signo opuesto situada simétricamente con respecto al plano conductor, como se muestra en la figura, el plano conductor corresponde a la superficie equipotencial de potencial cero del dipolo que hemos constituido al colocar la carga imagen. Por tanto, las líneas del campo que salen de la carga q son exactamente las características de un dipolo de cargas $\pm q$ y separación $2a$. Utilícese esta idea para calcular la fuerza sobre q.

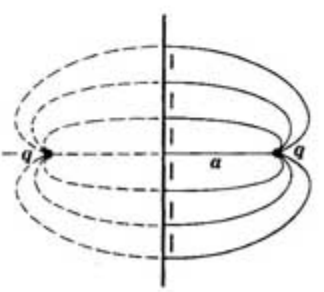


Fig. P 3.14

3.15 Colocadas en el punto -10 cm del eje x y en el origen hay dos cargas de $+{}^4/_3 \times 10^{-8}$ culombios y $-{}^1/_3 \times 10^{-8}$ culombios respectivamente.

a) Construir la curva de variación del potencial a lo largo del eje x, así como a lo largo de una línea perpendicular al eje x que pase por el punto $x = 10$ cm.

b) ¿En qué puntos del eje x es el potencial de 300 voltios? ¿Es la misma en estos puntos la intensidad del campo?

c) ¿En qué punto podría estar una tercera carga en equilibrio? ¿Sería un equilibrio estable?

3.16 El potencial en los puntos de un plano está dado por la expresión

$$V = \frac{ax}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{b}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

en la que x e y son las coordenadas cartesianas de un punto del plano mientras que a y b son constantes. Hallar las componentes E_x y E_y de la intensidad del campo en cada punto.

3.17 El potencial en los puntos de un plano es

$$V = \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{b}{r}$$

siendo r y θ las coordenadas polares de un punto del plano, mientras que a y b son constantes. Calcular las componentes E_r y E_θ de la intensidad del campo en cada punto.

CUATRO

Capacidad

4.1 Introducción

Resulta evidente que se necesita aportar trabajo exterior para agrupar varias cargas. Esto es consecuencia de las fuerzas de repulsión mutua entre cargas iguales. Un caso de interés considerable es aquel en el que las cargas se encuentran sobre un cuerpo conductor, o sobre un grupo de cuerpos conductores. Resulta de importancia en tal caso una magnitud llamada *capacidad* del sistema. La capacidad de un conductor, o de un conjunto de conductores, se mide por la cantidad de carga que se le debe comunicar para elevar su potencial en 1 voltio. Así, pues, la capacidad C en *faradios* está dada por

$$C \text{ (faradios)} = \frac{Q \text{ (culombios)}}{V \text{ (voltios)}} \tag{4.1}$$

El faradio es la unidad de capacidad tanto en el sistema de unidades mks como en el práctico (véase Cap. 15). Cuanto mayor sea la capacidad, mayor será la cantidad de carga que debe añadirse a fin de que el potencial se eleve 1 voltio. La capacidad de una configuración geométrica de conductores dada depende de la forma del cam-

po eléctrico, debido a las cargas situadas sobre los conductores, puesto que el potencial está relacionado con el trabajo necesario para traer las cargas desde el infinito, contra las fuerzas del campo eléctrico.

Como ilustración de esta conexión entre campo eléctrico y capacidad consideremos el caso sencillo de la esfera conductora aislada, que se indica en la Fig. 4.1. Supongamos que colocamos sobre

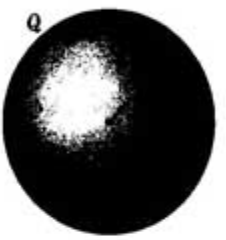


Fig. 4.1 Conductor esférico de radio r con una carga total Q.

la esfera metálica una carga Q. El campo tendrá simetría esférica, y el potencial en su superficie estará dado por

$$V = -\int_{\infty}^{r} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$

en donde hemos usado para **E** el campo de una carga puntual. De la Ec. (4.1) deducimos, $C = Q/V = 4\pi\epsilon_0 r$ faradios. La capacidad de la esfera aislada aumenta proporcionalmente con su radio.

4.2 El condensador

Generalmente nos encontramos ante configuraciones de conductores más complicadas. El caso de interés más frecuente es el de un par de conductores, conjunto que forma lo que se llama un *condensador*. Al igual que la capacidad tiene importancia teórica dentro de la teoría electrostática, el condensador es uno de los elementos fundamentales en los circuitos eléctricos, especialmente en los circuitos de corriente alterna y cuando se estudia el régimen transitorio. Como ejemplo de condensador discutiremos el conjunto de dos placas planas y paralelas que se indica en la Fig. 4.2. Si conectamos

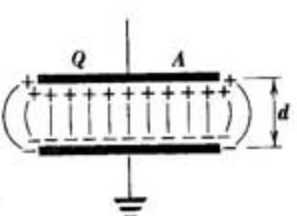


Fig. 4.2 Condensador plano, área de las placas A, separación d, densidad de carga $\sigma = Q/A$.

la placa inferior a tierra mediante un hilo conductor, como la tierra es un conductor relativamente bueno, lo mismo que la placa y el hilo, esto fija el potencial de la placa a lo que llamaremos potencial cero.

Cuando situamos sobre la placa superior una carga, por ejemplo, positiva, si esta placa se mantiene razonablemente cerca de la inferior, las cargas se trasladan a la parte inferior de la placa de arriba, y las líneas de fuerza se dirigen hacia abajo hasta la placa inferior donde deben terminar sobre unas cargas negativas. Estas cargas han sido traídas desde tierra por la atracción ejercida por las cargas positivas. Si la carga total de la placa superior es $+Q$, la carga total de la placa inferior será $-Q$. Puede probarse que desde tierra pasa efectivamente a la placa inferior una carga igual y de signo opuesto, tomando como base el concepto de líneas de fuerza. Sabemos que las líneas de fuerza originadas en las cargas positivas abandonan la superficie metálica siendo perpendiculares a ella. Cuando las líneas llegan a la placa inferior, deben terminar sobre cargas negativas puesto que no pueden penetrar en el conductor. Para que esto sea posible, las cargas positivas y negativas en las dos placas deben ser iguales. La atracción mutua entre cargas de signos opuestos es la que las lleva a las caras interiores de las placas. Como se indica en la Fig. 4.2, prácticamente no hay campo eléctrico fuera de la región comprendida entre las placas. Al afirmar esto despreciamos, sin embargo, la *dispersión* de las líneas en los bordes de las placas, lo que únicamente representa una pequeña corrección.

La capacidad del condensador plano se calcula como sigue. Sea d la separación entre las placas y A su área. Llamemos Q a la carga neta en la placa superior (y, por tanto, la placa inferior tendrá una carga $-Q$). El problema consiste en hallar el potencial de la placa superior, si la inferior se mantiene a $V = 0$, o lo que es equivalente, la diferencia de potencial entre las placas. Para resolverlo, calcularemos primero el campo en la región situada entre las placas. Después, integrando a lo largo de la distancia que separa las placas, obtendremos la diferencia de potencial. Aplicando el teorema de Gauss, como se hizo en el Ejemplo 2.7*c*, encontramos que $E = \sigma/\epsilon_0$, o bien $E = Q/A\epsilon_0$. Como el campo entre las placas es uniforme, la integración es inmediata:

$$V = -\int_0^d \mathbf{E}\cdot d\mathbf{x} = Q\frac{d}{\epsilon_0 A} \qquad \text{voltios}$$

Esto nos da para la capacidad el resultado, $C = Q/V = A\epsilon_0/d$ faradios.

Es importante destacar que la capacidad de este condensador es proporcional a su área (lo cual no es sorprendente), y que la

capacidad aumenta a medida que se reduce la distancia entre las placas.

El método que acabamos de emplear nos muestra que el cálculo de capacidades supone la integración del campo eléctrico entre dos superficies equipotenciales (usualmente las superficies de conductores), para obtener la diferencia de potencial. Después, ésta se relaciona con la carga responsable de tal diferencia de potencial. Desde este punto de vista, la esfera aislada que fue el primer caso en que determinamos la capacidad puede considerarse como uno de los electrodos de un condensador, estando el otro electrodo infinitamente alejado. De hecho, hemos supuesto que el segundo electrodo es tan grande, y de forma tal, que la densidad de carga en cualquiera de sus puntos es despreciable comparada con la densidad de carga sobre la esfera.

4.3 Ejemplos. Cálculo de capacidades

a) Capacidad entre conductores esféricos concéntricos. Consideremos, como se indica en la Fig. 4.3, que la esfera externa de radio b

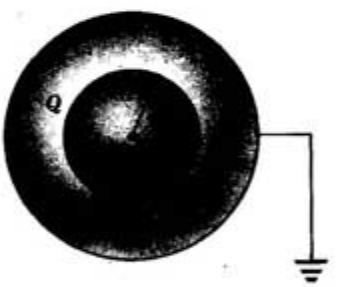


Fig. 4.3 Dos esferas metálicas concéntricas formando un condensador.

se halla unida a tierra. Coloquemos sobre la esfera interior (a través de un pequeño orificio practicado en la exterior), una carga Q. En la cara interna de la otra esfera se inducirá una carga igual y opuesta $-Q$ (esto es consecuencia del teorema de Gauss). Solo existe campo en la región entre las esferas y la diferencia de potencial se obtendrá integrando el campo:

$$V_{ab} = -\int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Por tanto,

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/a - 1/b} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad \text{faradios} \ ,$$

Como ya hemos calculado que el potencial de una esfera conductora de radio r es $V = 1/4\pi\epsilon_0\, Q/r$, podemos hallar la expresión de la capacidad por otro camino tomando directamente la diferencia entre los potenciales de dos esferas, en lugar de integrar el campo. En tal caso escribiríamos

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{Q}{(1/4\pi\epsilon_0)(Q/a - Q/b)} = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad \text{faradios}$$

Dejamos como problema para el lector la demostración de que la capacidad entre dos cilindros coaxiales es

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\,(b/a)}$$

donde a y b son los radios de los cilindros interior y exterior respectivamente, L su longitud y ln significa, como es usual, logaritmo neperiano.

b) Capacidad de una esfera conductora rodeada por otra hueca de paredes gruesas y aislada. Esta disposición de conductores bastante artificiosa resulta útil para fijar los conceptos de campo y potencial (Fig. 4.4). La esfera exterior está aislada e inicialmente descar-

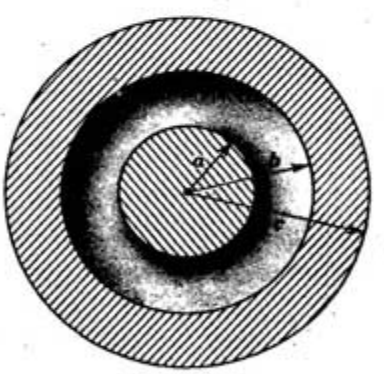


Fig. 4.4 Conductor esférico hueco rodeando a otro.

gada. Sobre la esfera interior se sitúa una carga $+Q$. Por el teorema de Gauss sabemos que se induce una carga $-Q$ en la cara interna de la esfera hueca, lo que deja una carga $+Q$ sobre su superficie exterior. Por consiguiente, fuera del sistema de esferas el campo es idéntico al de una carga puntual $+Q$ situada en su centro. Podemos, pues, calcular el potencial en la superficie externa V_c, integrando el campo desde el infinito en la forma usual. Dentro de la masa metálica (entre c y b) el campo debe ser cero, por tanto, V_b es el

mismo que V_c (puesto que $\mathbf{E}_r = 0 = -\partial V/\partial r$). El campo entre b y a es también el de una carga puntual $+Q$, así que el aumento del potencial en a sobre su valor en b puede obtenerse integrando desde b a a. Por tanto, el potencial en a, V_a, será

$$V_a = -\int_\infty^c \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_c^b \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} - \int_b^a \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^c \frac{dr}{r^2} - 0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 c} + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

De estas expresiones puede deducirse la capacidad en la forma acostumbrada.

4.4 Asociaciones de condensadores

En los circuitos los condensadores aparecen con frecuencia combinados. Las dos disposiciones más comunes consisten en la conexión de condensadores en *serie* o en *paralelo*. Vamos a calcular mediante razonamientos sencillos la capacidad de tales combinaciones. En la Fig. 4.5 se muestran dos condensadores conectados en paralelo.

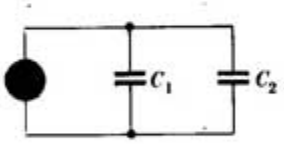


Fig. 4.5 Dos condensadores conectados en paralelo.

Como los electrodos están unidos directamente mediante hilos conductores, la diferencia de potencial entre los dos pares de placas debe ser la misma. Esta diferencia de potencial podemos expresarla en función de las cargas y capacidades de cada uno de los condensadores, en la forma

$$V_{ab} = \frac{Q_1}{C_1} \qquad V_{ab} = \frac{Q_2}{C_2}$$

La capacidad de un condensador equivalente único se obtendría comparando la carga total $Q_1 + Q_2$ con la diferencia de potencial V_{ab}. Es decir,

$$C = \frac{Q_1 + Q_2}{V_{ab}}$$

Pero, como $C_1 = Q_1/V_{ab}$ y $C_2 = Q_2/V_{ab}$, $C = C_1 + C_2$. En general, para cualquier número de condensadores en paralelo, la capacidad equivalente viene dada por

$$C = \sum_i C_i \tag{4.2}$$

En la Fig. 4.6 se muestran tres condensadores en serie. Consideremos inicialmente todos los condensadores descargados y entonces comuniquemos una carga $+Q$ al primer condensador. Con ello, se

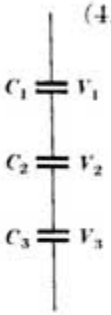


Fig. 4.6 Tres condensadores en serie.

inducirán cargas iguales y opuestas sobre las placas consecutivas. En contraste con la conexión en paralelo, que conducía a tensiones iguales en cada condensador, aquí resultan cargas iguales en cada condensador. Es decir, $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$. La diferencia de potencial total a través del conjunto será $V_1 + V_2 + V_3 = V$. Pero $V_1 = Q/C_1$, $V_2 = Q/C_2$ y $V_3 = Q/C_3$. Por tanto,

$$V = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right),$$

y la capacidad equivalente vendrá dada por $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \dfrac{1}{C_3}$ o,

En general, para conexión en serie,

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} \tag{4.3}$$

Esto es, en serie la inversa de la capacidad equivalente es la suma de las inversas de las capacidades.

4.5 Energía almacenada en los condensadores

En la Sec. 4.1 apuntamos el hecho bastante obvio de que siempre que un grupo de cargas se acercan entre sí, como en un condensador, debe realizarse trabajo contra las fuerzas repulsivas que se ejercen entre cargas iguales. El trabajo realizado queda almacenado como energía potencial. Esto es consecuencia de la ausencia de fuerzas disipativas, es decir, en virtud del carácter conservativo del campo electrostático. En cualquier caso, resulta de interés calcular la

energía almacenada en un condensador cargado. Esto es fácil, si recordamos que al ir cargándose un condensador a un potencial cada vez más elevado, el trabajo necesario para añadir cada incremento de carga aumenta, al mismo tiempo que aumenta la carga almacenada. En la Fig. 4.7 indicamos un condensador parcialmente

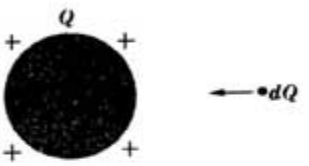


Fig. 4.7 Adición de una carga dQ a la carga Q de un condensador.

cargado con una carga Q. Se está acercando a él, contra las fuerzas del campo, una carga incremental dQ. En general, el trabajo necesario para añadir un incremento de carga dQ a un condensador que está al potencial V vendrá dado por $dU = V\,dQ$. Como V varía durante el proceso de carga, debemos realizar un cambio de variable antes de integrar. Resulta conveniente sustituir dQ por $C\,dV$. Esta relación se obtiene diferenciando $Q = CV$. La expresión del trabajo de carga del condensador resulta, pues,

$$U = \int_0^V CV\,dV = \tfrac{1}{2}CV^2 \quad \text{julios} \tag{4.4}$$

Empleando la Ec. (4.1) podemos expresarla también en las formas alternativas.

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \quad \text{julios}$$

¿Dónde está almacenada esta energía? Resulta útil considerar que la energía está almacenada en el campo eléctrico. De este modo, podemos decir que el trabajo que hemos realizado para cargar el condensador produce un campo eléctrico en una región del espacio y que la existencia de este campo lleva consigo la de energía almacenada. Sin pretender que éste sea el único punto de vista posible, podemos determinar la relación que hay entre la energía almacenada y la intensidad del campo eléctrico. El problema se simplifica si nos limitamos al condensador de placas paralelas. Este posee la propiedad, muy conveniente, de que la región en que existe campo está bien definida (despreciando efecto de dispersión) y que, además, en esta región el campo es uniforme.

Así, pues, si dividimos el trabajo total realizado al cargar el condensador por el volumen en que existe campo, podemos comparar el trabajo, o energía almacenada, por unidad de volumen con el valor del campo eléctrico.

Para hacer este cálculo, tomemos un condensador plano de área A y distancia entre placas d. Su capacidad, como ya hemos visto, es $C = \epsilon_0 A/d$. El trabajo para situar una carga Q sobre las placas es $U = {}^1/_2 Q^2/C$. Sustituyendo en esta expresión el valor de C y recordando que $Q = \sigma A$, nos queda $U = {}^1/_2 \sigma^2 Ad/\epsilon_0$. Ahora bien, el volumen que contiene el campo es precisamente Ad, por tanto, $U/\text{vol.} = {}^1/_2 \sigma^2/\epsilon_0$. Por otra parte, sabemos que el campo E debido a un conductor plano con una densidad de carga superficial σ es σ/ϵ_0. Sustituyendo nos queda

$$\frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \tag{4.5}$$

Según esto la energía almacenada en un volumen dado es proporcional a E^2 en ese volumen. Aun en el caso más general en que el campo varíe en magnitud y dirección en la región en que existe, la energía almacenada en cada pequeño elemento de volumen es proporcional a E^2. La expresión más general para la energía total almacenada en un campo electrostático, será pues:

$$U = {}^1/_2 \epsilon_0 \int E^2 \, dv \tag{4.6}$$

debiendo extenderse la integral a todo el espacio. Es necesario advertir aquí que la contribución a esta integral de las cargas puntuales sería infinita, puesto que E tiende a infinito a medida que nos aproximamos a ellas. Sin embargo, las cargas reales tienen siempre un tamaño finito y no hay en realidad dificultad. La energía debida a la existencia misma de las cargas, llamada *autoenergía*, no se incluye normalmente cuando se calcula la energía almacenada en un conjunto de cargas. Esto es permisible, porque la autoenergía no cambia cuando se modifican las posiciones relativas de las cargas.

Aunque en el caso de un condensador cargado esta atribución al campo de la energía almacenada no es necesaria (podríamos calcular la energía igualmente bien sobre la base de considerarla energía potencial de la distribución de cargas), resulta un punto de vista muy útil como veremos en la Sec. 4.7. Además, como también veremos al discutir la propagación de energía en las ondas electromagnéticas, resulta casi esencial adoptar este punto de vista.

4.6 Autoenergía de las cargas eléctricas

La expresión para la energía almacenada en un campo eléctrico, deducida anteriormente, nos permite investigar con más detalle el concepto de autoenergía de las cargas eléctricas. Supongamos que tenemos dos cargas aisladas, por ejemplo, electrones, situadas a gran distancia. La autoenergía de cada electrón, debida al campo culombiano de cada carga, está dada por la Ec. (4.6). Si se aproximan las dos cargas lo suficiente para que exista una superposición apreciable de sus campos, la energía total almacenada estará dada por la misma expresión, pero siendo E la suma vectorial de los campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ de las cargas individuales. Podemos, pues, escribir que la energía total es:

$$U = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \, dv$$

$$= \tfrac{1}{2}\epsilon_0 \int E_1^2 \, dv + \tfrac{1}{2}\epsilon_0 \int E_2^2 \, dv + \tfrac{1}{2}\epsilon_0 \int 2(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) \, dv$$

Los dos primeros términos son simplemente las autoenergías de los dos electrones separados, mientras que el tercero representa la energía adicional resultante de la superposición de los dos campos. Es posible demostrar que este tercer término es igual a $e^2/4\pi\epsilon_0 r$, siendo r la distancia mutua y e la carga de ambos electrones. Esta es precisamente la expresión de la energía potencial de una de las cargas en el campo de la otra. Este resultado aclara el hecho de que, al calcular el trabajo realizado al agrupar un conjunto de cargas, despreciemos los términos de autoenergía.

4.7 Fuerza entre las placas de un condensador

Las consideraciones precedentes sobre la energía almacenada en un campo eléctrico nos permiten realizar un cálculo sencillo de la fuerza entre unos electrodos cargados, considerando que el trabajo necesario para cambiar la energía almacenada moviendo uno de los electrodos debe estar dado por el producto de la fuerza por la distancia. En efecto, si $\mathbf{F}$ es la fuerza de atracción entre las placas cargadas de un condensador, debemos aplicar una fuerza $-\mathbf{F}$ para separarlas (cuasi-estáticamente). El trabajo externo necesario para aumentar la distancia entre las placas una cantidad dx será $-F\,dx$ (tomando dx positiva para separaciones crecientes). El aumento resultante de la energía almacenada debe ser $dU = -F\,dx$. Apliquemos esta expresión al condensador plano, de área A y distancia entre placas. x. Si elegimos el caso en que las armaduras estén ais-

ladas de modo que la carga sobre ellas sea constante, y tomamos la fórmula de la energía en que aparece Q: $U = \dfrac{Q^2}{2C} = \dfrac{Q^2 x}{2\epsilon_0 A}$. Para un desplazamiento pequeño dx, nos resulta $dU = (Q^2/2\epsilon_0 A)\, dx$. Como también es $dU = -F\, dx$, encontramos finalmente que en este caso $F = -Q^2/2\epsilon_0 A$, en la que el signo negativo indica que **F** es en el sentido negativo de las x, es decir, que hay atracción entre las placas.

Es éste un ejemplo de un método muy útil para calcular fuerzas basándose en consideraciones de trabajo-energía.

4.8 Solución de problemas de potencial. Generalidades

Al determinar la capacidad de varios condensadores, hemos visto que el problema central es determinar el campo y, a partir de él, el potencial debido a una cierta configuración de cargas. Un problema más general es determinar el potencial o el campo en todos los puntos del espacio, debido a cualquier configuración de superficies equipotenciales. En general, esto puede constituir una tarea matemáticamente muy difícil, aunque existen bastantes casos especiales en los cuales las matemáticas necesarias son razonablemente sencillas. La solución de estos problemas de potencial se conoce con el nombre de problemas de *condiciones en los límites*. Una vez se fijan los valores de los potenciales de ciertas superficies (los límites), incluyendo probablemente la condición de que el potencial tienda a cero en el infinito, el problema es soluble en principio. La solución resulta enormemente simplificada por el teorema de *unicidad*, que establece que el problema tiene una solución única, de modo que *cualquier* solución que satisfaga las condiciones en los límites dados es la *única* posible. Para evitar el tener que adentrarnos en excesivos detalles matemáticos en este momento, dejamos para cursos superiores el estudio en forma general de los problemas de potencial. En el Apéndice B se trata un caso sencillo como ejemplo de tales problemas.

4.9 Aparatos electrostáticos

Electroscopio. Medidas de potencial. Ya hemos visto en el Cap. 1 que la separación de las laminillas de un electroscopio es consecuencia de la repulsión mutua de las cargas iguales existentes en ellas. Ahora estamos en condiciones de ver que la cantidad de carga dependerá del potencial a que se carga el electroscopio, puesto que las laminillas poseerán una capacidad determinada. Por tanto, el electroscopio proporciona una medida directa del potencial. Este aparato y otros dispositivos semejantes son particularmente útiles para

medir potenciales en ciertas aplicaciones, puesto que en ellos no hay paso de corriente.

También es posible usar el electroscopio para medir pequeñas corrientes. Supongamos que la carga de un condensador está perdiéndose muy lentamente (el aislante no es perfecto y siempre deja pasar una pequeña corriente). Un electroscopio unido al condensador medirá como va variando el potencial. Si llamamos C a la capacidad total del sistema y Q a la carga original, según la Ec. (4.1), tenemos que el potencial valdrá $V = Q/C$. La variación de carga del sistema con el tiempo, puede relacionarse con la rapidez de variación del potencial diferenciando la ecuación, con C como constante. Así obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{C}i \tag{4.7}$$

En ella hemos escrito i, *intensidad de corriente*, en lugar de dQ/dt. (Discutiremos el concepto de corriente en el Cap. 7.) De este modo, si conocemos, o podemos medir, la capacidad de un sistema, determinando dV/dt con un electroscopio conectado al sistema podremos calcular la corriente.

Electrómetro absoluto de Kelvin. La fuerza electrostática entre dos placas paralelas cargadas, se emplea en un electrómetro construido por Kelvin para medir diferencias de potencial en unidades absolutas. Se conectan las placas como se indica en la Fig. 4.8, con la placa superior colgada de una balanza. Esta placa de forma circular está rodeada por un *anillo de guarda*. Su papel es hacer que el campo sea uniforme entre las placas para evitar el efecto perjudicial de los bordes. Este efecto de dispersión existirá realmente en el borde exterior del anillo de guarda, pero esto no afecta al campo en la zona central en que está situada la placa superior. Una vez que se ajusta la balanza de modo que la placa se encuentra exactamente en el mismo plano que el anillo de guarda con el sistema descargado (con la placa inferior unida a tierra), la placa inferior se conecta al

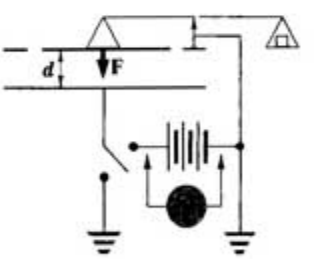


Fig. 4.8 Electrómetro absoluto de Kelvin. Nótese el empleo del anillo de guarda para eliminar el efecto de la dispersión del campo en los bordes del condensador.

potencial que se desea medir (indicado en la figura por una batería). *Entonces se añaden pesas adicionales en el platillo de la balanza* hasta conseguir que la placa superior vuelva a su posición original. En estas condiciones, según lo expuesto en la Sec. 4.7, tendremos $F = mg = Q^2/2\epsilon_0 A$. Como $Q/A = \sigma$, $E = \sigma/\epsilon_0$ y $V = Ed$, tendremos

$$mg = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d^2} V^2 \qquad \text{o} \qquad V = d\sqrt{\frac{2\,mg}{\epsilon_0 A}} \quad \text{voltios}$$

PROBLEMAS

4.1 Hallar la capacidad de un par de cilindros metálicos coaxiales de radios a y b, y longitud l, tal como indica la Fig. P 4.1.

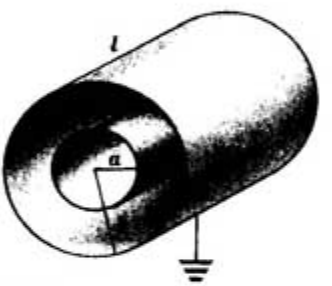


Fig. P 4.1

4.2 En la Fig. P 4.2 se muestra una esfera metálica de radio a, rodeada por otra hueca de radios interior y exterior, b y c respectivamente. Esta esfera está aislada y sin carga, y a su vez está rodeada por otra esfera de radio d unida a tierra. Calcular el potencial de la esfera más interna cuando se coloca en ella una carga Q. ¿Cuál es la capacidad de esta esfera?

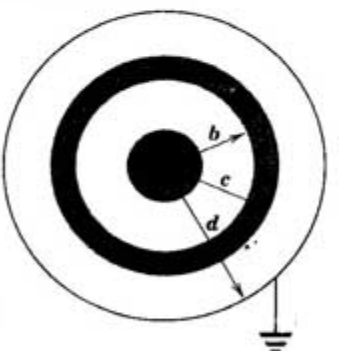


Fig. P 4.2

4.3 Hallar la capacidad de la combinación de condensadores indicada en la Fig. P 4.3.

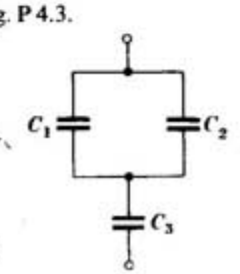


Fig. P 4.3

4.4 Repetir el cálculo para el conjunto de la Fig. P 4.4.

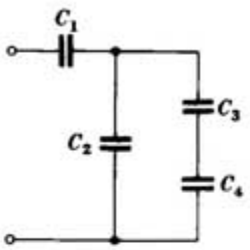


Fig. P 4.4

4.5 Un condensador plano con separación entre placas d tiene una capacidad C_1. Calcular su nueva capacidad cuando se introduce entre sus placas una lámina metálica aislada de espesor a.

4.6 Un condensador plano con separación entre placas d se carga a una diferencia de potencial V_1 y se deja aislado. Si se aumenta la distancia entre placas a $2d$, ¿cuál será el nuevo potencial V_2 entre placas? ¿En qué cantidad ha aumentado la energía almacenada en el condensador? ¿De dónde procede esta energía adicional?

4.7 Calcular la fuerza de atracción entre dos placas metálicas paralelas de área A y separadas por una distancia d. La diferencia de potencial establecida es V. Realizar el cálculo, expresando la fuerza, sobre una carga dq situada sobre una de las armaduras, debida al campo de las cargas existentes en la otra armadura. Integrar esta expresión para obtener la fuerza total sobre las cargas existentes en la primera placa.

4.8 En el dispositivo indicado en la Fig. P 4.8, hállese la relación que debe existir entre las capacidades de los cuatro condensadores a fin de que cuando se aplique una tensión entre los terminales a y b no aparezca diferencia de potencial alguna entre los terminales c y d. ¿Funcionaría del mismo modo este dispositivo si la tensión fuera aplicada a los terminales c y d?

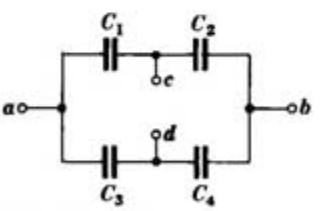


Fig. P 4.8

4.9 Calcular la capacidad del condensador de placas múltiples indicado en la Fig. P 4.9. El área de superposición de las placas es A y la separación entre placas consecutivas d. Los condensadores variables utilizados en radio, etc., se construyen de este modo con un dispositivo mecánico que permite cambiar el área de superposición.

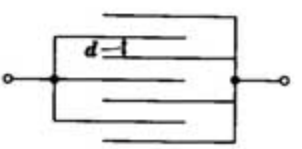


Fig. P 4.9

4.10 ¿Qué potencial sería preciso establecer entre las placas de un condensador plano con una separación de 1 cm para que la fuerza de gravitación sobre un electrón fuera compensada por un campo eléctrico de dirección adecuada? ¿Qué potencial sería necesario para compensar el peso de un protón?

4.11 A través de dos condensadores de 2 μf y 6 μf, conectados en serie, se aplica una diferencia de potencial de 200 voltios. ¿Cuál es la diferencia de potencial a través de cada uno de ellos, y cuál su carga?

4.12 Calcular la capacidad de la tierra (radio 6.380 km).

4.13 Una esfera conductora aislada de radio R tiene una carga Q. ¿Cuál es la energía total almacenada? ¿Cuál es el radio r en el que está contenida la mitad de la energía almacenada?

4.14 Una esfera cuyo radio es 0,2 m se carga a un potencial de 30.000 voltios.
a) ¿Cuál es la energía almacenada?
b) Si se conecta por medio de un hilo muy largo a otra esfera idéntica descargada y muy distante de la primera, ¿cuál es la energía final del sistema?

4.15 Un condensador esférico, con radios a y b de las esferas interior y exterior respectivamente, tiene una carga q en el interior. ¿Qué carga total debe colocarse sobre la esfera exterior ($r = b$) para que el campo eléctrico quede confinado a la región situada entre las esferas $a < r < b$?

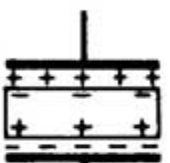
4.16 El ejemplo siguiente puede dar una idea aproximada del tamaño de un electrón. Supóngase que el electrón es una esfera de radio a, con su carga distribuida uniformemente sobre su superficie. Calcular la energía electrostática total asociada a esta distribución e igualarla a mc^2, donde m es la masa del electrón y c la velocidad de la luz ($3{,}0 \times 10^8$ m/seg). Usar la expresión obtenida para calcular el radio del electrón.

4.17 Dos condensadores, uno cargado y el otro descargado, se conectan en paralelo. Demostrar que, cuando se alcanza el equilibrio, cada condensador lleva una fracción de la carga inicial igual a la relación entre su capacidad y la suma de ambas capacidades. Comprobar que la energía final es menor que la energía inicial, y deducir una fórmula que dé la diferencia en función de la carga inicial y las capacidades de los dos condensadores.

4.18 Un condensador plano tiene placas de 500 cm^2 de área, separadas por una distancia de 1 cm. Se aplica una diferencia de potencial de 2.000 voltios entre las placas y después se dejan aisladas.
a) ¿Cuál es la energía almacenada en el condensador?
b) Se coloca una lámina metálica aislada de 2 mm de espesor entre las placas y paralela a ellas. ¿Cuánto trabajo ha sido realizado por las fuerzas eléctricas durante la inserción de la lámina?
c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas del condensador después de que se ha introducido la lámina?

CINCO

Dieléctricos



5.1 Introducción

Hemos considerado los problemas de electrostática virtualmente en ausencia de materia, excepto por el empleo de conductores para establecer superficies equipotenciales. Comenzamos ahora nuestro estudio de los fenómenos eléctricos en presencia de materia. En lo que hoy se clasificaría como un experimento de Física del estado sólido, Faraday en 1837 repitió de modo independiente experimentos anteriores de Cavendish (alrededor de 1770), demostrando que, cuando se llenaba completamente con una sustancia aislante, como mica o vidrio, el espacio entre las placas de un condensador, la capacidad se multiplicaba por un factor K mayor que 1. Este factor, que se llama *constante dieléctrica* o *poder inductivo específico*, es independiente de la forma y tamaño del condensador, pero su valor varía ampliamente para diferentes materiales. El vacío tiene el valor 1 (por definición), distintos tipos de vidrio presentan valores alrededor de 6, el agua tiene 81 y el valor para el aire es 1,0006, tan próximo a 1 que ordinariamente despreciaremos su influencia. Todas las sustancias que no son conductores presentan este efecto y se llaman *dieléctricas*. En este capítulo, es nuestro propósito des-

cubrir las causas de este efecto y determinar los parámetros adicionales que lo caracterizan.

5.2 Polarización de la materia

El origen último del comportamiento dieléctrico está en la naturaleza eléctrica de la materia. Aunque normalmente es eléctricamente neutra como conjunto, en detalle, la materia, está constituida por cargas positivas y negativas en igual número. En las sustancias dieléctricas estas cargas no son libres de moverse, bajo la influencia de un campo eléctrico de origen externo, como lo son los electrones de conducción en un metal. Sin embargo, las fuerzas que produce un campo externo determinan pequeños desplazamientos relativos (en escala atómica) de las cargas de signos opuestos. La extensión de estos desplazamientos depende de la mayor o menor rigidez con que las cargas están unidas. Este desplazamiento de cargas, resultante del campo exterior aplicado, se llama *polarización* de la sustancia.

Podemos considerar como un modelo grosero de un dieléctrico dos retículos de cargas intercalados como indica la Fig. 5.1, en la que la representación se ha hecho en dos dimensiones por simplici-

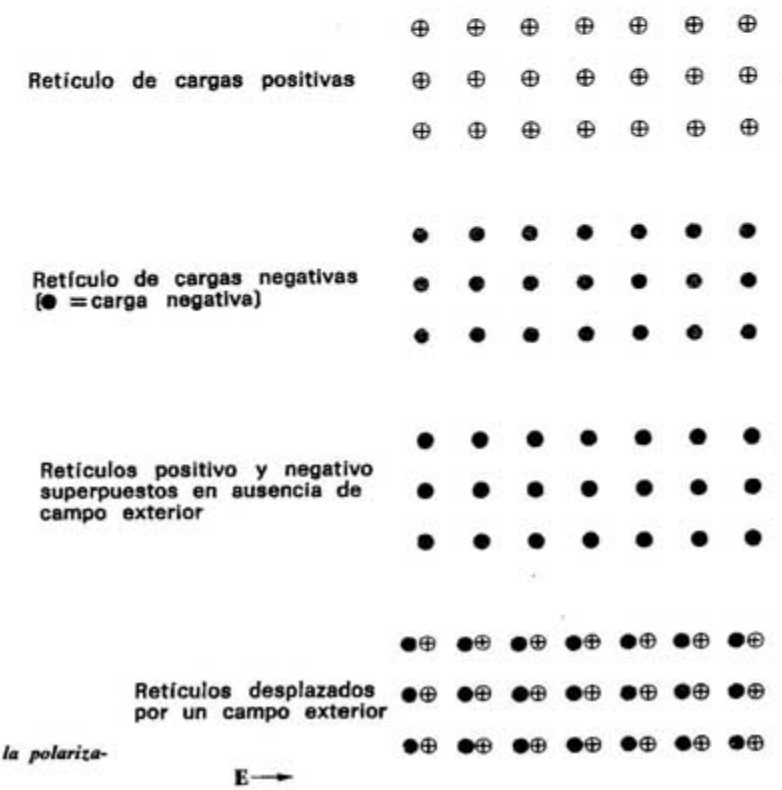


Fig. 5.1 Modelo sencillo de la polarización.

dad. Podemos decir que el retículo de cargas positivas es debido a los núcleos de los átomos que constituyen el sólido, y que el negativo representa la posición media de los electrones asociados a cada átomo. En ausencia de campos exteriores podemos esperar que los dos retículos estén superpuestos, pero los desplazamientos relativos de las cargas por efecto de un campo aplicado produce una separación de cargas, como se indica en la figura. Este modelo es demasiado grosero para dar una imagen exacta de las condiciones existentes en el interior de la materia en escala atómica o subatómica. Proporciona, sin embargo, una imagen que resulta útil desde el punto de vista macroscópico. Esto es, el efecto de la polarización sobre el campo existente fuera de la materia es independiente de los detalles exactos del modelo. Análogamente, el campo *medio* en el interior de la materia, resultante tanto del campo externo como de los efectos de la polarización de la materia misma, no depende de los detalles del modelo. La razón para ello se ve fácilmente. Tomemos un pequeño volumen en el interior de la masa de sustancia polarizada. Aunque sea muy pequeño, este volumen incluirá aún un número muy grande de átomos. (Hay normalmente alrededor de 10^{22} átomos por centímetro cúbico en un sólido, de modo que 10^8 átomos ocuparían solamente 10^{-14} cm^3.) Como sugiere la Fig. 5.2*a*, la carga media en tal volumen sería cero a pesar del desplazamiento relativo de los retículos de cargas. Por ejemplo, cada carga positiva tiene cargas negativas iguales a su derecha y a su izquierda. Por otra parte, para un volumen que encierre una superficie límite perpendicular a la polarización (Fig. 5.2*b*), existe una carga positiva neta en la superficie que no está compensada como las cargas en el interior del material. Desde el punto de vista macroscópico, por tanto, el resultado importante del desplazamiento de cargas debido a la polarización es la aparición de una carga neta en la superficie de la sustancia. Esta se llama *carga de polarización*. En ausencia de polarización queda compensada por las cargas iguales y de signo contrario superpuestas.

Desde el punto de vista atómico el desplazamiento relativo de los centros de carga produce otro efecto. Los retículos de carga pueden ahora considerarse como una colección de dipolos eléctricos. De hecho, podemos hablar de un *momento dipolar por unidad de volumen*, **P**. Este se llama también *vector polarización*. Nótese que la palabra polarización se utiliza con dos significados: uno cualitativo, refiriéndonos a los desplazamientos relativos de cargas positivas y negativas, y el otro cuantitativo, una medida del momento dipolar por unidad de volumen resultante en la sustancia polarizada. **P** es una magnitud vectorial que tiene la dirección y sentido de los dipolos inducidos. Como el mo-

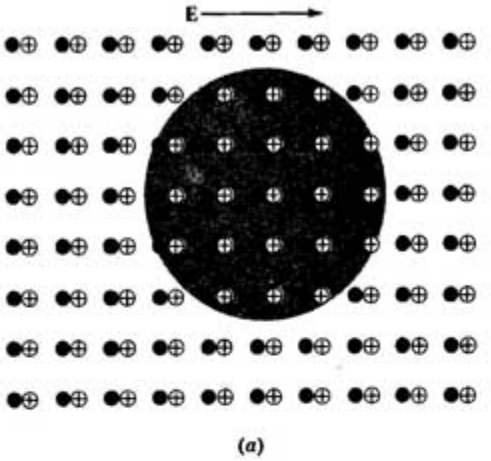


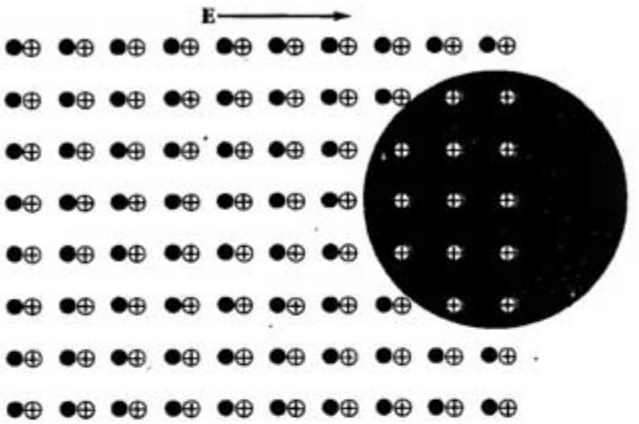
Fig. 5.2 Dieléctrico polarizado: (a) Un volumen interior al medio polarizado tiene carga neta nula; (b) un volumen que encierra una superficie normal a la dirección de la polarización tiene una carga superficial inducida neta.

mento dipolar por unidad de volumen se refiere a una estructura en escala atómica, es de interés fundamental para el estudio de la naturaleza del sólido. Sin embargo, como hemos visto anteriormente, no es medible directamente por métodos macroscópicos. Por otra parte, existe una relación sencilla entre **P** y la carga de polarización superficial de una lámina dieléctrica. Los efectos de la carga superficial son medibles directamente y dan cuenta de todos los efectos externos de los dieléctricos. A continuación veremos esta relación.[1]

5.3 Cargas de polarización y momento dipolar por unidad de volumen

La Fig. 5.3 constituye una imagen idealizada de un bloque de dieléctrico situado en un campo eléctrico exterior uniforme. Las cargas superficiales netas que se muestran son el resultado del desplazamiento relativo de las cargas positivas y negativas. Llamaremos σ_p culombios/m^2 a la densidad superficial de cargas de polarización. La relación entre P y σ_p se puede obtener calculando el momento dipolar del bloque de dieléctrico de dos modos distintos. En efecto, el momento dipolar total del bloque será P multiplicado por su volumen, es decir, PAL. Por otra parte, el bloque puede considerar-

[1] Cuando el material dieléctrico no es homogéneo, de modo que los dipolos inducidos no tienen una distribución uniforme, hay un efecto adicional, una distribución de volumen de cargas de polarización, ρ_p. Esta densidad de carga es debida a una compensación incompleta de los dipolos individuales. No discutiremos más estas complicaciones.



se como un gran dipolo formado por las cargas superficiales $\pm Q = \sigma_p A$ separadas por una distancia L. En este caso el momento dipolar del bloque sería $QL = \sigma_p AL$. Comparando ambos resultados vemos que

$$P = |\sigma_p| \tag{5.1}$$

El signo de la carga de polarización superficial depende de la dirección del vector de polarización y según qué extremo del bloque consideremos. El módulo de **P**, el momento dipolar por unidad de volumen, depende de la densidad de carga y del desplazamiento relativo de las cargas + y −. La dirección del vector **P** es la misma que la del desplazamiento.

Podemos generalizar la Ec. (5.1) considerando la situación en la que la superficie del dieléctrico no sea perpendicular a **P** (Fig. 5.4),

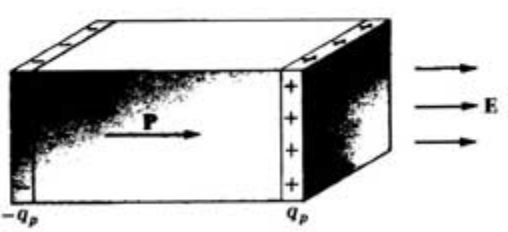


Fig. 5.3 Un bloque dieléctrico polarizado con cargas inducidas netas en su superficie.

formando la normal a la superficie un ángulo θ con **P**. En este caso, si llamamos dx al desplazamiento real de los retículos de carga en el interior del dieléctrico, puesto que tiene lugar en una dirección inclinada respecto a la superficie, el desplazamiento efectivo de las car-

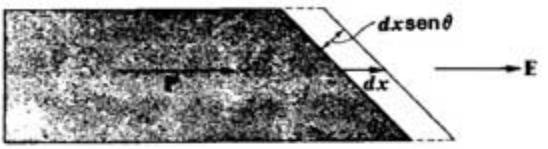


Fig. 5.4 Relación entre la carga superficial de polarización y el vector polarización **P**. *El desplazamiento relativo real de las cargas es dx; el desplazamiento efectivo es cos θ dx.*

gas es únicamente $dx \cos\theta$. Así, pues, para superficies paralelas a **P**, no aparece carga superficial de polarización, y en general

$$P_n = -\sigma_p \tag{5.2}$$

siendo P_n la componente de **P** normal a la superficie.

En la Ec. (5.2) hemos incluido un signo negativo. La explicación es la siguiente: La polarización **P** es magnitud que constituye un campo vectorial que posee propiedades matemáticas muy similares a las de **E**. Para una sustancia uniformemente polarizada puede ser representado por líneas que se originan y terminan sobre cargas de polarización superficiales, y el teorema de Gauss será aplicable a estas líneas. Pero el sentido de **P** es desde las cargas negativas a las positivas, de modo que las líneas de **P** emergen de una región que contiene carga de polarización negativa, y, terminan en otra, que contiene carga de polarización positiva. Se deduce que

$$\int_{SC} \mathbf{P}\cdot d\mathbf{S} = -q_p$$

Despejando P_n en esta ecuación se obtiene la Ec. (5.2) con el signo negativo como se indica. Naturalmente **P** únicamente puede existir en regiones ocupadas por la materia. El efecto macroscópico de la producción de dipolos atómicos, se manifiesta en el exterior por el campo de las cargas superficiales de polarización. Esto es, cuando se polariza un trozo de materia, podemos explicar los efectos macroscópicos sobre el campo en sus proximidades, remplazando el bloque completo por las cargas superficiales de polarización resultantes. Al hacer esto, estamos ignorando la naturaleza corpuscular de la materia y considerando que está constituida por cargas positivas y negativas distribuidas continua y uniformemente y superpuestas, como sugiere aproximadamente la Fig. 5.3. Solo necesitaremos considerar la estructura corpuscular de la materia cuando deseemos conocer el modo como varía el campo dentro de la materia en escala atómica, o cuando intentemos relacionar el valor de K con la estructura atómica.

Hagamos ahora la hipótesis simplificadora adicional de que la

polarización sea proporcional al campo aplicado. Con esta hipótesis, podemos escribir

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E} \tag{5.3}$$

donde χ es la llamada *susceptibilidad eléctrica* y $\mathbf{E}$ es el campo *macroscópico* (esto es, el campo medio debido al campo exterior aplicado tal como queda *modificado* por las cargas superficiales de polarización). El suponer que la polarización varía linealmente con el campo corresponde al comportamiento de la mayor parte de las sustancias. La susceptibilidad de una sustancia relaciona la polarización al campo macroscópico que la produce. La constante ϵ_0 se incluye únicamente para simplificar la forma que presentan otras relaciones que veremos más adelante.

Ahora que ya hemos visto que el campo eléctrico macroscópico debido a una sustancia polarizada puede estudiarse en función de las cargas superficiales de polarización, es posible escribir una expresión general que relacione el campo eléctrico con las cargas verdaderas y las cargas de polarización. Es sencillamente el teorema de Gauss:

$$\int_{SC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}(q_v + q_p) = \frac{1}{\epsilon_0} q_{\text{total}} \tag{5.4}$$

que establece que el flujo de las líneas del campo eléctrico, que salen de un volumen determinado, depende solo de la carga total, tanto libre como de polarización, existente un dicho volumen. Es

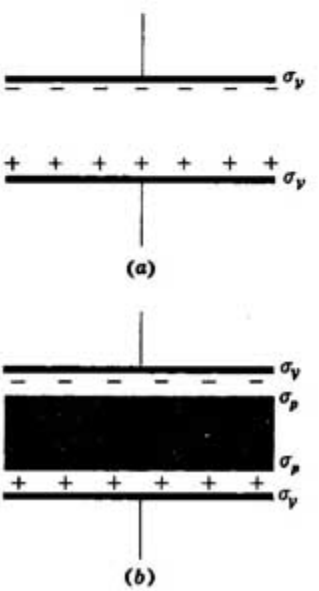


Fig. 5.5 Influencia del dieléctrico en un condensador: (a) Densidad de cargas libres σ_v; (b) Densidad de carga de polarización σ_p, se añade algebraicamente al efecto de σ_v.

ésta una relación general muy importante; sin embargo, es fácil darse cuenta de que no es necesariamente sencillo llegar partiendo de esta ecuación a una solución de una configuración determinada del campo eléctrico. A continuación, aplicaremos esta ecuación, que relaciona el campo eléctrico con sus fuentes, a una configuración de geometría muy simple y veremos cómo puede emplearse para lograr un conocimiento detallado del campo.

Examinemos el efecto de introducir un dieléctrico entre las placas de un condensador plano. La Fig. 5.5*a* muestra el condensador en el vacío. En ella hemos llamado σ_v a la densidad de cargas verdaderas o móviles. El campo uniforme entre las placas, como ya hemos visto, tiene el valor, $E = \sigma_v/\epsilon_0$.

En la Fig. 5.5*b* se ha introducido el dieléctrico de modo que llene completamente el espacio existente entre las placas. Como resultado del campo originado por las cargas móviles el dieléctrico se polariza, y aparece una carga de polarización de densidad σ_p en sus dos superficies. Para calcular el campo medio dentro del dieléctrico debemos tomar en cuenta tanto σ_v como σ_p. Apliquemos la Ec. (5.3) a las distribuciones planas de carga en las armaduras del condensador y en las superficies de la muestra dieléctrica. Al ser uniforme el campo eléctrico en las proximidades de una distribución plana de cargas, podemos sacar **E** fuera de la integral y despejarlo. Esto nos da

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_v + \sigma_p) \tag{5.5}$$

donde σ_v y σ_p son densidades de carga, obtenidas dividiendo la carga superficial total por el área de la superficie de Gauss, que hemos supuesto igual al área de las placas. Este es exactamente el mismo procedimiento que en el condensador en el vacío salvo por la inclusión de la carga superficial de polarización. Como σ_p es siempre de signo contrario a σ_v, el efecto de la carga superficial de polarización es siempre el de debilitar el campo con respecto al existente en el vacío. Discutiremos esto con más detalle en la Sec. 5.9, en la que estudiaremos el campo despolarizante.

El campo E, tal como se usa en la Ec. (5.5) para describir la situación en un dieléctrico, es en realidad únicamente un campo *medio*. Al movernos de un punto a otro a escala atómica, el campo varía ampliamente de modo periódico. E es simplemente el valor medio, que al ser integrado, proporciona la diferencia de potencial correcta entre las placas del condensador.

Calculemos ahora la capacidad de este condensador lleno de dieléctrico, empleando como en el vacío la relación $C = Q/V$. En

este cálculo utilizaremos para Q únicamente las cargas verdaderas, puesto que estamos interesados solo en aquella carga que podemos colocar sobre las placas. En efecto, las cargas de polarización están incorporadas a la sustancia dieléctrica y, por tanto, escapan a nuestro control directo. La ecuación de la capacidad puede, pues, escribirse

$$C = \frac{\sigma_v A}{Ed} \tag{5.6}$$

siendo $\sigma_v A$ la carga total verdadera en cada placa. Como E ya no está relacionado con σ_v por la ecuación $\sigma_v = \epsilon_0 \mathbf{E}$, válida en el vacío, debido a los efectos perturbadores de σ_p, despejaremos σ_v en la Ec. (5.5) que tiene en cuenta las cargas de polarización. Esto da $\sigma_v = \epsilon_0 E - \sigma_p$. Si las propiedades macroscópicas del dieléctrico están caracterizadas por su susceptibilidad [Ec. (5.3)], $-\sigma_p$ puede remplazarse por $\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}$. Esto nos da

$$\sigma_v = \epsilon_0(1 + \chi)E \tag{5.7}$$

Ecuación que sustituida en la de la capacidad conduce a

$$C = \frac{\epsilon_0(1 + \chi)A}{d} \tag{5.8}$$

Comparando este resultado con el anteriormente obtenido para la capacidad del condensador plano en el vacío, $C = \varepsilon_0 A/d$, vemos que $(1 + \chi)$ es precisamente el factor constante encontrado por Faraday. Así, pues, la relación entre constante dieléctrica y susceptibilidad es

$$K = 1 + \chi \tag{5.9}$$

La Ec. (5.8) puede escribirse también en la forma $C = \epsilon A/d$, siendo

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi) \tag{5.10}$$

que se llama permitividad de la sustancia. La constante K puede escribirse ahora como

$$K = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{5.11}$$

la relación entre la permitividad de la sustancia y la del vacío. Como esta constante es por definición la relación entre la capacidad de un condensador, con y sin la sustancia colocada en el espacio, entre las armaduras, tiene el mismo valor en todos los sistemas de unidades.

Hay dos cuestiones importantes a señalar en esta discusión sobre las formas alternativas de describir las propiedades dieléctricas de la materia. Una, es que aún no hemos relacionado estas propiedades con la polarización de los átomos individuales. La segunda, es que en nuestro razonamiento hemos admitido que la sustancia dieléctrica llenaba completamente el espacio existente entre las placas del condensador. Falta aún estudiar el efecto de introducir una muestra del material, por ejemplo, en un campo eléctrico uniforme extenso. Sin embargo, en cualquier situación las magnitudes P, K, χ y ϵ resultan ser aún los parámetros válidos para describir el comportamiento de la sustancia.

5.4 El desplazamiento eléctrico D

Una nueva magnitud muy útil que permite una visión más profunda de los problemas de campos en presencia de medios dieléctricos es el *desplazamiento eléctrico* **D**, una magnitud vectorial que presenta ciertas semejanzas con **E**. Intentemos buscar una magnitud que dependa únicamente de las cargas verdaderas, en contraste con **E**, que depende tanto de las cargas verdaderas como de las cargas de polarización. La magnitud que necesitamos puede definirse mediante la ecuación vectorial,

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \tag{5.12}$$

Vamos a demostrar que esta definición hace que **D** sea una magnitud que obedece el teorema de Gauss, pero cuyas fuentes son solo las cargas verdaderas. Aun en presencia de materia, las cargas de polarización no intervienen en **D**. Justificamos la definición dada y de hecho la introducción misma del vector **D**, sobre la base de que constituye una herramienta de cálculo conveniente para la solución de un gran número de problemas. En este aspecto, como en muchos otros, **D** es semejante a **E**.

Empecemos por eliminar **E** entre la Ec. (5.12) y la ecuación general (5.4). Obtenemos

$$\epsilon_0 \int_{SC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} - \int_{SC} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{total}} \tag{5.13}$$

y podemos emplear esta forma general de la ecuación para determinar las propiedades de **D**. Unicamente necesitamos evaluar la integral que contiene **P**, lo que puede hacerse basándonos en nuestras consideraciones anteriores sobre la carga de polarización superficial en el límite de un dieléctrico, donde encontramos $P_n = -\sigma_p$. Vemos inmediatamente que si **P** es uniforme, $\int_{SC} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = 0$ en todos los

puntos interiores al dieléctrico. Para demostrarlo consideremos una superficie de Gauss que encierra el volumen A, indicado en la Fig. 5.6,

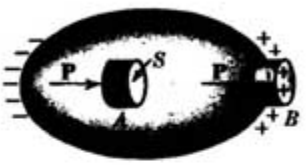


Fig. 5.6 Superficies de Gauss, interior al cuerpo dieléctrico polarizado y en su superficie.

con superficies planas S normales a **P**. Evidentemente, PS en la cara de la izquierda es igual y de signo opuesto al valor que toma PS en la cara de la derecha, y la integral sobre la superficie cilíndrica es cero, de modo que la integral extendida a toda la superficie cerrada debe ser también cero. Sin embargo, cuando la superficie de Gauss encierra parte de la superficie límite del dieléctrico, si **P** tiene una componente normal a esta superficie, como ocurre en el caso del volumen B de la figura, la integral sobre la cara de la izquierda tiene el valor $P_n S$, y en la cara de la derecha, fuera del dieléctrico, es cero. Por tanto, tenemos

$$\int_{SC} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = \int_{SC} P_n \, dS = -\sigma_p \, dS = -q_p \tag{5.14}$$

donde q_p es la carga total de polarización existente dentro de la superficie de Gauss. El signo negativo resulta del hecho de que **P** está dirigido hacia dentro del volumen de Gauss cuando la carga de polarización es positiva, y hacia fuera cuando la carga es negativa. Esto es exactamente lo contrario que ocurre en el caso del campo **E**.

Ahora que ya hemos calculado $\int_{SC} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S}$, podemos despejar $\int_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ en la Ec. (5.13). Resulta

$$\int_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_{\text{total}} - q_p = q_v \tag{5.15}$$

Por tanto, la magnitud vectorial **D**, que hemos introducido al escribir la Ec. (5.12), obedece al teorema de Gauss; sus fuentes son únicamente las cargas verdaderas, aún en presencia de materia. Fuera de los dieléctricos, en regiones en las que solo existen cargas verdaderas, $\epsilon_0 \int_{SC} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q_v$ y $\int_{SC} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q_v$, de modo que

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \tag{5.16}$$

Así, pues, fuera de la materia D y E tienen la misma dirección y sus módulos difieren únicamente en el factor constante ϵ_0.

Apliquemos ahora este nuevo concepto del desplazamiento a problema sencillo de una lámina dieléctrica situada entre las placas de un condensador plano (Fig. 5.7). Ya hemos visto que, en este

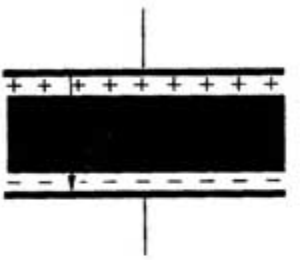


Fig. 5.7 Lámina dieléctrica entre las placas de un condensador.

caso, $E = (\sigma_v + \sigma_p)/\epsilon_0$. De acuerdo con las Ecs. (5.3) y (5.10), podemos escribir esto en la forma $E = (1/\epsilon)\sigma_v$. Si aplicamos ahora el teorema de Gauss para **D** en la forma dada por la Ec. (5.15), encontramos

$$D = \sigma_v \tag{5.17}$$

Que comparada con la que nos da **E** nos permite escribir

$$\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} \tag{5.18}$$

Por tanto, si conocemos la densidad de cargas libres sobre las placas del condensador y el valor de ϵ para la sustancia, podemos hallar **E**, calculando primero $D = \sigma_v$ y empleando después $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$.

Antes de pasar a otros ejemplos para fijar estas nuevas ideas, vamos a discutir un poco más los conceptos de **E** y **D**. Imaginemos de nuevo el condensador plano con dieléctrico, y que en éste se han hecho dos cavidades como se indica en la Fig. 5.8. La cavidad de la

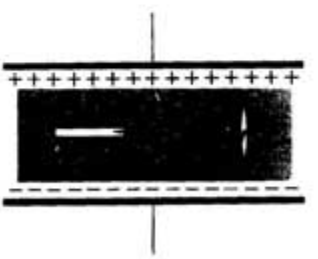


Fig. 5.8 Cavidades en una lámina dieléctrica colocada entre las placas de un condensador. El valor de **D** *en la cavidad de la izquierda de forma de disco es el mismo que si no existiera la cavidad. Análogamente, el valor de* **E** *en la cavidad de la derecha de forma acicular es el campo medio* **E** *en el dieléctrico.*

izquierda tiene forma de disco, orientada con sus caras perpendiculares al campo, y la cavidad de la derecha tiene forma de cilindro alargado orientado según la dirección del campo. Vamos a calcular el campo en el interior de estas cavidades tan diferentes. En la cavidad en forma de disco el campo es debido exclusivamente a las car-

gas verdaderas q_v. Esto es consecuencia de la cancelación de los campos producidos por las cargas de polarización en las superficies exteriores del dieléctrico y las de signo opuesto existentes en las superficies de la cavidad. Como ambas distribuciones de carga son planas y con la misma densidad de carga, sus campos iguales y opuestos se compensan, dejando únicamente el campo producido por las cargas verdaderas de las placas del condensador. Por tanto, el campo en la cavidad discoidal es $E = \sigma_v/\epsilon_0$, o sea

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} = \sigma_v \tag{5.19}$$

Este valor de **D**, en el vacío existente en la cavidad, es precisamente el valor medio de **D** en el interior del dieléctrico como si no hubiera cavidad.

En la cavidad acicular, si es bastante larga y delgada, podemos despreciar el efecto de las pequeñas cargas de polarización que aparecen en sus extremos sobre el campo en su centro, de modo que el campo dentro de la cavidad sería

$$E = \frac{1}{\epsilon_0}(\sigma_v + \sigma_p)$$

que corresponde precisamente al campo medio **E** en el interior del dieléctrico en ausencia de cavidad, como demostramos en la Ec. (5.5).

Aunque en un ejemplo particular, hemos llegado aquí a dos de las condiciones en las superficies límite, para **E** y **D** que discutiremos con mayor detalle más adelante. Generalizando los resultados anteriores, podemos decir: (1) En la superficie de un dieléctrico, la componente normal a la superficie de **D** es continua. (Como **D** en la cavidad en forma de disco es normal a la superficie, tiene el mismo valor dentro y fuera de la cavidad.) (2) En la superficie límite de un dieléctrico, la componente de **E** paralela a la superficie es continua. (En la cavidad en forma alargada **E** es paralelo a la superficie e igual a su valor en el seno del dieléctrico.)

5.5 Ejemplos

a) Campo eléctrico en un condensador plano con dieléctrico. Discutimos este caso sencillo para mostrar el contraste entre el empleo de **D** y **E**. Demostramos en la Sec. 5.4 que cuando se aplica el teorema de Gauss al condensador plano, el campo eléctrico resulta ser $E = (\sigma_v + \sigma_p)/\epsilon_0$. Sustituyendo σ_p en función de ϵ o de K teníamos

$$E = \frac{1}{\epsilon}\sigma_v = \frac{1}{K\epsilon_0}\sigma_v$$

Alternativamente podemos aplicar el teorema de Gauss al vector desplazamiento **D** [Ec. (5.15)]. Esto nos da

$$DA = q_v \qquad \text{o} \qquad D = \frac{q_v}{A} = \sigma_v$$

donde $A = \int d\mathbf{S}$, es el área plana de la superficie de Gauss a través de la cual salen las líneas de D. Como dentro del dieléctrico, $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, esta última ecuación puede escribirse

$$E = \frac{1}{\epsilon}\sigma_v$$

que está de acuerdo con el resultado obtenido antes directamente con **E**. Así, pues, **E** puede obtenerse expresándolo en función de σ_v y σ_p; o bien, si se maneja **D**, puede obtenerse el mismo resultado sin usar σ_p explícitamente. La capacidad del condensador puede obtenerse como antes sustituyendo el valor de **E** en la Ec. (5.6).

b) Capacidad de un condensador que contiene dos láminas dieléctricas diferentes. Sean K_1 y a, K_2 y b, las constantes dieléctricas y espesores de las dos láminas (Fig. 5.9). Las líneas de **D** son continuas

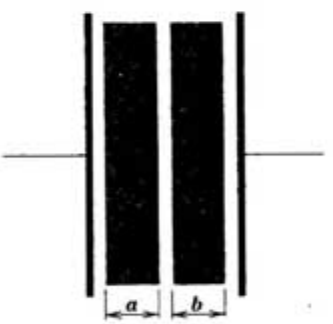


***Fig. 5.9** Dos láminas dieléctricas que llenan completamente el espacio entre las placas de un condensador plano.*

entre las dos armaduras, puesto que tienen su origen solo en las cargas *verdaderas*. Aplicando el teorema de Gauss a la superficie de separación entre las dos láminas dieléctricas obtenemos el mismo resultado. Por tanto, $D_1 = D_2$, o sea $\epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$, o bien $K_1 E_1 = K_2 E_2$.

Hallemos ahora la capacidad según $C = Q_v/V$, siendo $V = E_1 a + E_2 b$ (puesto que $dV/dx = -E$). Por tanto, $C = \sigma_v A/(E_1 a + E_2 b)$. Para el condensador plano ya hemos visto que $D = \sigma_v$ por el teorema de Gauss, de modo que podemos escribir

$$C = \frac{A}{a/\epsilon_1 + b/\epsilon_2} \qquad \text{o} \qquad \frac{A\epsilon_0}{a/K_1 + b/K_2} \qquad \textbf{faradios}$$

5.6 Condiciones en la superficie límite entre dos dieléctricos

Vamos a demostrar ahora más rigurosamente las condiciones en las superficies límite que dimos en la Sec. 5.4. En la Fig. 5.10 se ha esquematizado el plano de separación entre dos regiones de constantes dieléctricas diferentes, K_1 y K_2. Supondremos que no existen cargas verdaderas en la superficie límite. Aplicando el teorema de Gauss para **D** a una superficie cerrada apropiada, como la que se indica, el flujo neto a su través debe ser cero, puesto que en el volumen interior a la superficie dibujada no hay cargas verdaderas.

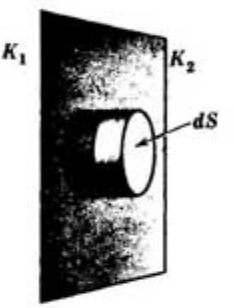


Fig. 5.10 Superficie de Gauss para el cálculo de las condiciones que debe satisfacer **D** *en la superficie de separación de dos dieléctricos. Resulta* $D_{n1} = D_{n2}$. *(La componente normal de* **D** *es continua al atravesar la superficie de separación.)*

Podemos despreciar el flujo a través de la parte curva de la superficie considerada, puesto que su área puede hacerse todo lo pequeña que se desee sin más que reducir la distancia entre las dos caras planas. Si llamamos S_1 al área de la cara plana de la izquierda y S_2 a la de la derecha, podemos escribir

$$\int_{SC} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{D}_1\cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{D}_2\cdot d\mathbf{S} = -\int_{S_1} D_{n1}\, dS + \int_{S_2} D_{n2}\, dS = 0$$

El signo de la integral correspondiente al lado izquierdo de la superficie límite es negativo porque las líneas de **D** se dirigen hacia el interior del volumen. Se deduce directamente de la ecuación anterior que

$$D_{n1} = D_{n2} \tag{5.20}$$

Esto es, *la componente normal de* **D** *es continua al atravesar la superficie límite.*

En la Fig. 5.11 se indica el argumento necesario para **E**. En este

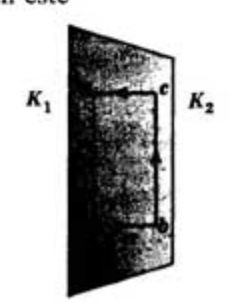


Fig. 5.11 Integral de línea para el cálculo de las condiciones que debe satisfacer **E** *en la superficie de separación de dos dieléctricos. Resulta* $E_{t1} = E_{t2}$. *(La componente tangencial de* **E** *es continua al atravesar la superficie de separación.)*

caso hemos de aplicar el principio de conservación de la energía en el campo electrostático. Expresaremos que la integral de línea $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ para la trayectoria indicada. Las partes de esta trayectoria perpendiculares al plano, *ab* y *cd*, pueden hacerse infinitamente pequeñas si se desea, de modo que podemos escribir

$$\int_b^c \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} + \int_d^a \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = \int_b^c E_{t2}\, dl - \int_d^a E_{t1}\, dl = 0$$

puesto que $bc = da$, por tanto,

$$E_{t1} = E_{t2} \tag{5.21}$$

es decir, *la componente tangencial de* **E** *es continua al atravesar la superficie límite.*

Podemos hacer uso de estas condiciones en los límites para ver el efecto que el cambio de dieléctrico tiene sobre las líneas del campo eléctrico que cruza la superficie límite. Se supone que ambos dieléctricos son isótropos. En tales sustancias **P** es siempre paralelo a **E**, de modo que según la Ec. (5.12) **D** es también paralelo a **E**. En la Fig. 5.12 se han trazado dos vectores correspondientes a las direc-

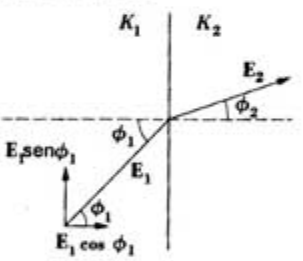


Fig. 5.12 Cambio de dirección de E en la superficie de separación entre dos dieléctricos.

ciones del campo eléctrico en los dos dieléctricos. Vamos a determinar las relaciones que existen entre los ángulos ϕ_1 y ϕ_2. De la condición $E_{t1} = E_{t2}$ deducimos $E_1 \operatorname{sen} \phi_1 = E_2 \operatorname{sen} \phi_2$. Análogamente de la condición $D_{n1} = D_{n2}$, tenemos $D_1 \cos \phi_1 = D_2 \cos \phi_2$. Combinando estos resultados, tenemos

$$\frac{E_1 \operatorname{sen} \phi_1}{D_1 \cos \phi_1} = \frac{E_2 \operatorname{sen} \phi_2}{D_2 \cos \phi_2}$$

Pero, como $D_1 = \varepsilon_0 K_1 E_1$ y $D_2 = \varepsilon_0 K_2 E_2$, la ecuación se convierte en

$$\frac{1}{K_1} \operatorname{tg} \phi_1 = \frac{1}{K_2} \operatorname{tg} \phi_2$$

o bien

$$\frac{\operatorname{tg} \phi_1}{\operatorname{tg} \phi_2} = \frac{K_1}{K_2} \tag{5.22}$$

5.7 Fuerza entre cargas situadas en un medio dieléctrico

Uno de los efectos más importantes que provoca un dieléctrico es la modificación de las fuerzas que actúan entre las cargas eléctricas. Consideremos un cuerpo esférico equipotencial, con una carga q_v, sumergido, por ejemplo, en un fluido dieléctrico. Procedamos en la forma usual a calcular la fuerza que la carga q_v ejerce sobre otra carga Q_v situada a una distancia r. Calcularemos primero el campo, en el punto ocupado por Q_v, producido por la carga q_v, tras de lo cual la fuerza se obtendrá fácilmente. Podemos hacer este cálculo por dos caminos diferentes. Suponiendo que hay simetría esférica alrededor de q_v, podemos hacer uso del teorema de Gauss para determinar **D**:

$$\int_{SC} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = q_v \qquad \text{o} \qquad D = \frac{q_v}{4\pi r^2} = \epsilon E = \epsilon_0 K E$$

Por tanto,

$$E = \frac{1}{K}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_v}{r^2} = \frac{q_v}{4\pi\epsilon r^2} \tag{5.23}$$

La condición de simetría esférica asegura que el módulo de **D** sea constante sobre cualquier superficie esférica con centro en el de la esfera cargada y que **D** sea normal a esta superficie. Esto está justificado en tanto la otra carga Q_v esté lo bastante alejada para que la perturbación introducida en el campo en las proximidades de q_v sea despreciable. Podemos, pues, sacar **D** de la integral como hicimos con **E** cuando estudiábamos el campo de una esfera en el vacío.

La otra forma de hacer el cálculo del campo de q_v es aplicar el teorema de Gauss para **E** teniendo en cuenta las cargas de polarización en la superficie del dieléctrico que limita con la esfera. Admitiendo también ahora la simetría esférica alrededor de q_v, tenemos

$$\int_{SC} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}(q_v + q_p)$$

Lo que da para el campo

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_v + q_p}{r^2}$$

Comparando estos dos resultados, vemos que la carga *efectiva* de esta última expresión $(q_v + q_p)$ es igual a $(1/K)q_v$.

Determinemos ahora la fuerza debida a este campo sobre la otra carga Q_v. Supondremos nuevamente simetría esférica, esta vez alre-

dedor de Q_v. Es fácil ver que la carga de polarización inducida en la superficie del dieléctrico que limita la segunda carga no afecta la fuerza sobre ella, puesto que como ya hemos visto, el campo en el interior de una distribución esférica de carga es cero. Podemos calcular la fuerza a partir del campo sin más complicaciones

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Q_v q_v}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_v q_v}{Kr^2} \tag{5.24}$$

Esta expresión es exactamente la misma que la correspondiente a cargas puntuales en el vacío, salvo que la permitividad del vacío ε_0 ha sido remplazada por la permitividad del medio dieléctrico ε. El requisito de simetría esférica para las cargas de polarización, que hemos necesitado para aplicar el teorema de Gauss, restringe la validez de la Ec. (5.24) a situaciones en las que la distancia entre los cuerpos cargados es mucho mayor que su radio.

Este cálculo constituye un ejemplo de un resultado general, en presencia de un dieléctrico, las fuerzas entre cargas se reducen. Este efecto explica en física del estado sólido, situaciones en las que las fuerzas entre los electrones quedan disminuidas, debido a la naturaleza dieléctrica del medio en que se mueven. Para que esta idea sea válida es preciso que el electrón se mueva en el medio de distancias lo suficientemente alejadas para que esté sometido al campo medio resultante de la polarización.

5.8 Energía almacenada en un medio dieléctrico

Hemos visto que en el vacío la energía almacenada por unidad de volumen en un campo eléctrico es

$$\tfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

Vamos ahora a modificar esta expresión para incluir el caso de los medios dieléctricos. Procederemos exactamente como en la Sec. 5.3 cambiando ε_0 por ε para tener en cuenta la presencia del dieléctrico. Esto nos conduce como expresión de la densidad de energía a

$$\frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon} \qquad \text{julios/m}^3 \tag{5.25}$$

El exceso de energía respecto al vacío corresponde al trabajo extra que es necesario invertir en polarizar el medio.

Así como en la Sec. 4.7 obtuvimos la fuerza entre las placas del condensador calculando la derivada de la energía almacenada, va-

mos ahora a examinar el problema de las fuerzas que aparecen en una lámina dieléctrica introducida en un condensador. Como se indica en la Fig. 5.13 determinaremos la fuerza que actúa sobre la

Fig. 5.13 Lámina dieléctrica introducida entre las placas de un condensador plano.

lámina debida al campo eléctrico del condensador. Antes de iniciar el cálculo, observemos que el parámetro más conveniente para describir el estado de carga del condensador es el potencial V, o lo que es lo mismo, el campo E, dado por $V = Ed$. En efecto, su valor es el mismo en todas las regiones del condensador, mientras que la densidad de carga en las zonas en que hay dieléctrico es diferente de la existente donde no lo hay. Pueden considerarse dos situaciones, según se mantenga constante el potencial o la carga del condensador. Vamos a elegir el caso de potencial constante como si el condensador estuviera conectado a una batería.

Para calcular la fuerza sobre la lámina dieléctrica, veamos el efecto que produce sobre la energía almacenada un desplazamiento dx de la lámina. Como este desplazamiento modifica la capacidad del condensador, si éste ha de mantenerse a potencial constante, habrá una variación dQ en la carga del condensador. Como consecuencia, cuando la lámina se mueve la batería realiza un trabajo $V\,dQ$. Por tanto, el cambio total de energía almacenada en el condensador dU, está relacionado con el trabajo realizado por el campo al mover la lámina por la ecuación

$$dU = -F\,dx + V\,dQ \tag{5.26}$$

siendo F la fuerza ejercida por el campo sobre la lámina. Vamos a calcular los distintos términos de esta ecuación para hallar F en magnitud y sentido. Podemos calcular la energía total almacenada aplicando al condensador la Ec. (5.25). Esto nos da

$$\begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}E^2\epsilon_0 xbd + \tfrac{1}{2}E^2\epsilon(l - x)bd \\ &= \tfrac{1}{2}E^2bd[\epsilon l - (\epsilon - \epsilon_0)x] \end{aligned} \tag{5.27}$$

donde b es la anchura del condensador, l su longitud y d la separación entre placas. Diferenciando esta ecuación encontramos que el cambio en U provocado por un pequeño desplazamiento dx de la lámina es

$$dU = -\tfrac{1}{2}E^2bd(\epsilon - \epsilon_0)\,dx \tag{5.28}$$

La carga total de las armaduras del condensador está dada por

$$Q = \sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 = \epsilon_0 Exb + \epsilon E(l - x)b$$

donde $A_1 = xb$ es el área de la porción sin dieléctrico y $A_2 = (l - x)b$ es el área de la parte ocupada. Por tanto, la variación de carga para un desplazamiento dx será

$$dQ = -(\epsilon - \epsilon_0)bE\,dx \tag{5.29}$$

Como $V = Ed$, podemos despejar $F\,dx$ en la Ec. (5.26)

$$\begin{aligned} F\,dx &= -dU + V\,dQ \\ &= \tfrac{1}{2}E^2bd(\epsilon - \epsilon_0)\,dx - E^2bd(\epsilon - \epsilon_0)\,dx \end{aligned}$$

o sea

$$F = -\tfrac{1}{2}E^2bd(\epsilon - \epsilon_0) \tag{5.30}$$

Como F resulta negativa tiene el sentido en que x disminuye. Esto es, las fuerzas electrostáticas atraen la lámina hacia *dentro* del condensador. El trabajo suministrado por la batería, mientras la lámina se desplaza, es el doble del trabajo que las fuerzas eléctricas realizan para introducir el dieléctrico en el condensador. Cuando se permite que la lámina penetre en el condensador una distancia dada, la mitad de la energía suministrada por la batería se invierte en realizar trabajo externo.

Vamos a considerar ahora, el caso en que el condensador se mantiene a carga constante, es decir, aislado, en lugar de estar conectado a una batería que mantiene constante la tensión. El cálculo sería en este caso más complicado, puesto que V cambia a medida que la lámina dieléctrica se mueve. Sin embargo, cuando la lámina está en una posición determinada y el potencial tiene un valor definido, la carga en las placas y en la lámina son las mismas independientemente de que la batería esté, o no, conectada. Como la fuerza total depende realmente de las fuerzas entre las cargas verdaderas de las armaduras y las cargas de polarización del dieléctrico, debemos llegar al mismo resultado para la fuerza, tanto si el condensador está conectado a la batería como si no. Así, pues, la fuerza entre las placas para una separación y una diferencia de potencial dadas es independiente de que el condensador esté aislado o conectado a un potencial constante.

5.9 Factor despolarizante

Cuando se sitúa un cuerpo polarizable en un campo exterior, las cargas superficiales inducidas, resultantes de la polarización, alteran el campo original. Por ello, puede resultar muy difícil calcular el campo resultante en el interior (o el exterior) del cuerpo. Nuestra discusión anterior, sobre una lámina plana colocada dentro de un condensador plano, fue un caso muy especial de este tipo de problemas. Vamos a considerar ahora algunos casos más generales, evitando aquellos que son matemáticamente complicados.

Nos limitaremos a casos en los que el campo original $\mathbf{E}_0$ es uniforme. Consideremos primero una placa plana de material dieléctrico colocada perpendicularmente al campo exterior (Fig. 5.14). En los

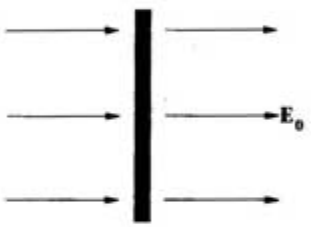


Fig. 5.14 Placa dieléctrica con su plano perpendicular al campo exterior.

bordes de la placa, el campo, tanto dentro como en las proximidades de la misma, quedará seriamente alterado como resultado de las cargas de polarización y ya no será uniforme; pero no intentaremos resolver esta parte del problema.

Por el contrario, en la región central de la placa, las cargas de polarización están distribuidas uniformemente sobre la superficie, ya que el campo exterior permanece uniforme. Calcularemos el campo dentro de la placa mediante las condiciones en los límites ya conocidos. La componente normal de **D** es la misma dentro y fuera de la placa, esto es, $D_{n1} = D_{n2}$. En tanto que nos mantengamos alejados de los bordes de la placa, podemos obtener el valor de **D** en el exterior por la relación $\mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$. Por tanto, en el interior

$$\mathbf{D}_{\text{placa}} = \mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$$

Por otra parte, el campo eléctrico dentro de la placa, $\mathbf{E}_{\text{placa}}$, está relacionado con el valor correspondiente de **D** por la ecuación $\mathbf{D}_{\text{placa}} = \epsilon \mathbf{E}_{\text{placa}}$. Combinando estos resultados obtenemos

$$\mathbf{E}_{\text{placa}} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \mathbf{E}_0 = \frac{1}{K} \mathbf{E}_0 \tag{5.31}$$

Esto es, el campo dentro de la placa queda reducido por el factor $\frac{\epsilon_0}{\epsilon} = \frac{1}{K}$ respecto al campo original exterior.

Resulta conveniente considerar el campo en la placa como el resultado de la modificación del campo exterior original por un *campo despolarizante* uniforme, debido a las cargas de polarización. Según esto, podemos escribir

$$E_{\text{placa}} = E_0 - E_{desp} \tag{5.32}$$

Donde $\mathbf{E}_{desp}$ es el campo despolarizante debido a las cargas de polarización de las caras de la placa. Este campo se opone al campo exterior E_0. Combinando las Ecs. (5.31) y (5.32), podemos despejar el campo despolarizante

$$E_{desp} = (K - 1)E_{\text{placa}} \tag{5.33}$$

Ahora bien, la polarización del dieléctrico está relacionada con el campo existente en el mismo por la ecuación

$$P = \epsilon_0 \chi E_{\text{placa}} = \epsilon_0 (K - 1) E_{\text{placa}}$$

Y comparando con la Ec. (5.33) resulta

$$E_{desp} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

El caso de una lámina plana es muy especial; en general, el campo despolarizante es menor que en este caso. Escribiremos, pues, en el caso general,

$$E_{desp} = \frac{1}{\epsilon_0} LP \tag{5.34}$$

donde L es el llamado *factor despolarizante*, coeficiente que depende de la forma del dieléctrico. El factor L proporciona una medida de la extensión en que el campo externo original E_0 queda modificado por muestras de diferentes formas.

Podemos calcular L para el caso de geometría plana recordando que $P = \epsilon_0 \chi E_{\text{placa}} = \epsilon_0 (K - 1) E_{\text{placa}}$, y combinando este resultado con las Ecs. (5.33) y (5.34), encontramos que $L = 1$. Este es el mayor valor que puede tener L; es decir, hemos elegido el caso cuya geometría conduce a la máxima influencia de las cargas de polarización inducidas.

El caso que conduce al extremo opuesto (valor mínimo de L) es el de una varilla larga y delgada colocada con su eje paralelo al

campo (Fig. 5.15). En la región central de la varilla, lejos de los efectos perturbadores de las cargas de polarización inducidas en los extremos, el campo es uniforme y la condición en los límites, $E_{t1} = E_{t2}$,

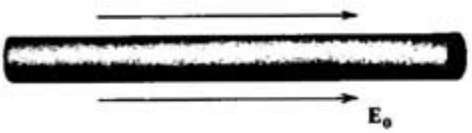


Fig. 5.15 Varilla dieléctrica con su eje paralelo al campo exterior.

por ser para esta geometría los campos dentro y fuera de la varilla tangenciales a la superficie, nos da directamente

$$E_{\text{varilla}} = E_0$$

Como en la varilla E es igual al campo exterior sin modificar, el campo despolarizante en esta situación debe ser cero, de modo que tendremos

$$L = 0$$

Para otras formas, L tendrá un valor intermedio entre 0 y 1.

Estrictamente hablando, solo podemos discutir el valor del factor despolarizante si el campo despolarizante es uniforme, puesto que solo en tales casos será uniforme el campo en el interior del cuerpo cuando se coloca en un campo también uniforme. En los dos ejemplos que hemos visto, la placa perpendicular al campo y la varilla paralela al campo, la aproximación de uniformidad del campo solo se cumplía en las regiones centrales. En cambio, en un elipsoide situado en un campo exterior uniforme el campo despolarizante es siempre uniforme, con lo que el campo en el interior del cuerpo será uniforme si el campo aplicado también lo es. Así, pues, si distorsionamos la placa de forma que se convierta en un elipsoide muy achatado, y la varilla se convierte análogamente en un elipsoide muy alargado, obtenemos casos en los que el campo es uniforme en todo el interior del cuerpo. Otra forma de interés es la esfera que no es sino un caso particular de elipsoide. El campo en el interior de una esfera es uniforme y el factor despolarizante es $L = {}^1/_3$. Este valor es el que se obtiene en el Apéndice C. En el caso de cuerpos magnéticos en el seno de campos magnéticos aparecen problemas enteramente análogos, como veremos en el Cap. 9.

5.10. Polarizabilidad atómica

De todos los parámetros estudiados en los dieléctricos, la susceptibilidad χ es la que está más relacionada con la polarizabilidad de los átomos mismos. En la ecuación $\chi = P/\epsilon_0 E$, el momento dipolar por unidad de volumen está ligado al campo macroscópico en el mate-

rial. Sin embargo, la dificultad reside en que el campo macroscópico o medio no constituye una medida satisfactoria del campo *local* que produce la polarización de los átomos individuales. Llamemos E_{loc} a este campo dejando de momento su determinación. Definiremos la *polarización atómica* α, según la ecuación

$$p = \alpha E_{loc} \tag{5.35}$$

en la que p es el momento atómico inducido por el campo local. Si suponemos que en el material solo existe una especie de átomos y hay N átomos por unidad de volumen, podemos escribir para la polarización

$$P = Np = N\alpha E_{loc} \tag{5.36}$$

No intentaremos aquí el cálculo de α a partir de las propiedades atómicas, pero indicaremos los problemas inherentes a la determinación del campo local.

Consideremos una muestra elipsoidal de dieléctrico situada en un campo uniforme E_0 como se indica en la Fig. 5.16. Fijemos

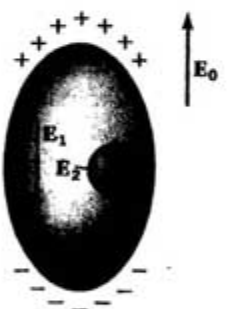


Fig. 5.16 Cálculo de E_{loc} en un punto P interior a un elipsoide dieléctrico colocado en un campo eléctrico uniforme. El efecto de todos los dipolos exteriores a la superficie esférica trazada puede remplazarse por el de las cargas superficiales inducidas. Los interiores a dicha superficie esférica deben considerarse como tales dipolos individuales. Sus efectos se anulan para cristales que tienen simetría cúbica.

nuestra atención en algún átomo determinado del sólido y veamos los términos que contribuyen a E_{loc} en el punto ocupado por el átomo (excluyendo, naturalmente, el átomo mismo, ya que no será polarizado por su propio campo). El campo en este punto es la suma del campo externo y las contribuciones de los restantes átomos (o dipolos) del material. Ya hemos visto que la contribución de los átomos *muy distantes* al que consideramos puede calcularse por los efectos equivalentes de las cargas superficiales de polarización. Pero los efectos de los dipolos próximos a nuestro átomo habremos de considerarlos por separado. Tracemos una superficie esférica alrededor del átomo, de tamaño suficiente para poder considerar todos los átomos exteriores a esta superficie como muy distantes. Sus efectos se tendrán en cuenta como hemos dicho mediante las cargas super-

ficiales de polarización. Si prescindimos de las contribuciones de los átomos vecinos (interiores a la esfera imaginada), el campo local tendrá tres orígenes

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3$$

$\mathbf{E}_0$ es el campo exterior aplicado y $\mathbf{E}_1$ el campo despolarizante debido a las cargas de polarización en la superficie exterior del cuerpo dieléctrico. El valor de $\mathbf{E}_1$ depende naturalmente de la forma de la muestra—en particular, del valor de L el factor despolarizante—y viene dado por $-L\mathbf{P}/\epsilon_0$. El término $\mathbf{E}_2$ resulta análogamente de las cargas de polarización inducidas en la cara interna de la superficie de la esfera imaginaria trazada y su valor es $^1/_3(\mathbf{P}/\epsilon_0)$. El factor despolarizante $^1/_3$ es el mismo que dimos para la esfera dieléctrica, pero debido a que ahora se trata de una superficie interior dentro del dieléctrico, su contribución es positiva. Nótese que *no* es el mismo que calcularíamos para un hueco esférico en el dieléctrico, puesto que aquí no hemos quitado los átomos interiores a la esfera trazada. Así en nuestro cálculo el campo medio es uniforme, mientras que en un hueco esférico verdadero el campo medio en la región próxima al hueco no sería uniforme.

Nos queda ahora calcular $\mathbf{E}_3$, la contribución local de la serie de dipolos comprendidos en la esfera imaginaria. Sin embargo, resulta que, si nos encontramos en el caso bastante común de una red cristalina que posee simetría cúbica, la contribución de estos dipolos vecinos es nula por compensación mutua. Por tanto, podemos escribir para el campo local

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_0 - \frac{L\mathbf{P}}{\epsilon_0} + \frac{1}{3}\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

En una estructura cristalina más complicada, se necesitaría un término más para tener en cuenta estos dipolos vecinos. No necesitamos considerar por separado las cargas de polarización en la superficie exterior de la esfera trazada puesto que realmente ya están incluidas en la contribución de los mismos dipolos.

Una vez que disponemos de la relación entre E_{loc} y el campo aplicado, estamos en condiciones de determinar la polarizabilidad atómica experimentalmente. En cuanto a su estimación teórica solo diremos unas palabras. Hay tres clases de posibles contribuciones a la polarizabilidad. En general, la aplicación de un campo eléctrico provoca cierta distorsión de la nube electrónica del átomo con respecto al núcleo. Este efecto puede llamarse *polarizabilidad electrónica*. En segundo lugar, si tenemos un sólido iónico, existirá desplazamiento relativo de los iones positivos y negativos lo que constitu-

ye la *polarizabilidad iónica*. Finalmente, si existen moléculas con momento dipolar permanente, como, por ejemplo, las moléculas de agua, un campo exterior tiende a orientar los dipolos, normalmente distribuidos al azar, de modo que se produce una contribución a la polarización. Esta última se llama *polarizabilidad dipolar*.

Estas tres contribuciones pueden ser determinadas separadamente mediante experimentos en los que el campo aplicado se hace variar rápidamente. A medida que se aumenta gradualmente la frecuencia del campo aplicado, al principio hay contribución de los tres tipos de polarizabilidad, pero cuando se alcanzan frecuencias en la región de las microondas (del orden de 10^9 ciclos/seg) los dipolos cuya respuesta es relativamente lenta, no son capaces de seguir las rápidas variaciones del campo aplicado y cesa su contribución. La polarización iónica continúa actuando hasta la región del infrarrojo (del orden de 10^{13} ciclos/seg), y la polarización electrónica no desaparece hasta la región del ultravioleta (más de 10^{15} ciclos/seg).

La polarización debida a dipolos permanentes tiene importancia en todos los líquidos y gases cuyas moléculas sean polares, así como en algunos sólidos. La desaparición de esta contribución es la que explica la disminución de la constante dieléctrica del agua, desde 81 para campos estáticos o de bajas frecuencias, a 1,77 para frecuencias ópticas. Además como las vibraciones térmicas tienden a destruir la orientación de los dipolos permanentes producida por el campo eléctrico, la polarizabilidad dipolar disminuye al aumentar la temperatura.

5.11 Materiales ferroeléctricos

Ciertos tipos de sustancias dieléctricas están polarizadas espontáneamente en ausencia de campos exteriores. Esta auto-polarización es debida a desplazamiento de iones en el cristal por la acción de campos eléctricos locales. Los campos locales producidos por desplazamientos de iones dan lugar a fuerzas sobre otros iones que, para pequeños desplazamientos, resultan mayores que las fuerzas elásticas restauradoras en el cristal. Como consecuencia, las posiciones de equilibrio de los iones son tales que el cristal presenta una polarización neta. Tales materiales se llaman *ferroeléctricos* por analogía con los fenómenos magnéticos algo semejantes de las sustancias ferromagnéticas (véase Sec. 9.10). Las sustancias ferroeléctricas presentan generalmente grandes susceptibilidades. También presentan histéresis en la polarización provocada por campos exteriores, y pierden su polarización espontánea por encima de una cierta temperatura crítica. Una de las sustancias ferroeléctricas mejor conocidas es el titanato de bario ($BaTiO_3$), que debido a su gran

constante dieléctrica, se emplea para la construcción de condensadores, especialmente cuando se exige gran capacidad y tamaño muy pequeño.

PROBLEMAS

5.1 Un bloque dieléctrico, esquematizado en la Fig. P 5.1, está polarizado uniformemente con polarización **P**. Hallar la densidad de las cargas de polarización σ_p sobre las caras 1, 2 y 3. (Determinar tanto la magnitud como el signo de las cargas.)

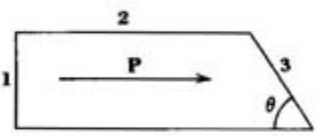


Fig. P 5.1

5.2 Dos elipsoides dieléctricos semejantes están situados en un campo eléctrico como se indica en la Fig. P 5.2. ¿Para qué orientación es mayor el factor despolarizante? Dar razones cualitativas.

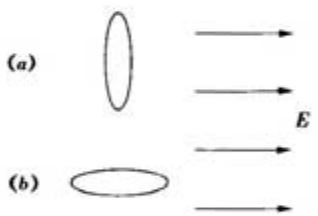


Fig. P 5.2

5.3 Las placas de un condensador plano están aisladas, existiendo una diferencia de potencial V_1 entre las mismas. Se introduce una lámina dieléctrica de constante dieléctrica K entre las placas de modo que llena completamente el volumen existente entre ellas. Calcular el nuevo potencial V_2. Comparar los valores de la energía almacenada antes y después de insertar la lámina. Con esta comparación como base, razonar si las fuerzas electrostáticas tienden a empujar la lámina hacia dentro de las placas o a expulsarla.

5.4 Imagínese que el condensador del Prob. 5.3 está conectado a una batería de modo que se mantenga la tensión constante mientras se está introduciendo la lámina entre las placas. Comparar la energía almacenada en un condensador antes y después de la inserción. Con esta comparación como base, ¿es posible deducir la dirección de la fuerza como en el Prob. 5.3? Explíquese.

5.5 Demostrar mediante un esquema sencillo que en el límite entre dos dieléctricos de constante dieléctrica distinta aunque las *líneas* de **D** son continuas, la *magnitud* de **D** es en general diferente en los materiales. Mostrar mediante otro esquema el caso especial en que **D** tiene el mismo valor en ambos materiales.

5.6 Comparar las capacidades de dos condensadores idénticos salvo la forma en que se han colocado los dieléctricos, como indica la Fig. P 5.6, teniendo una constante dieléctrica K_1 y K_2.

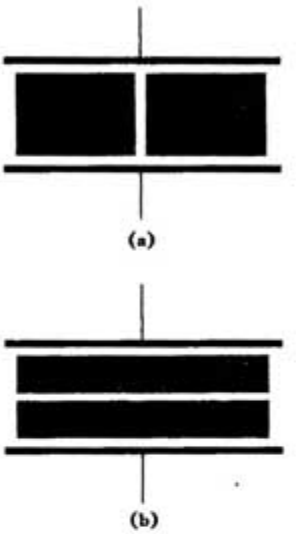


Fig. P 5.6

5.7 Considerar un metal como cuerpo polarizable. ¿Cuál sería el valor de la polarización **P**? ¿Cuál es la susceptibilidad χ?

5.8 Una esfera de radio r está polarizada uniformemente, con una polarización **P** en la dirección x. Dar la expresión para la carga superficial de polarización para un anillo cuyo radio vector forma un ángulo θ con el eje x, tal como indica la Fig. P 5.8. Intégrese esta expresión para obtener la carga positiva total de la superficie de la esfera.

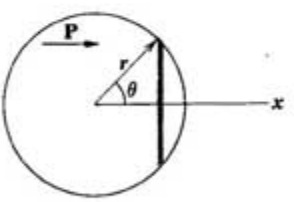


Fig. P 5.8

5.9 Dos condensadores de capacidades iguales están conectados en paralelo, cargados a una tensión V_1 y después aislados de la fuente de tensión (Fig. P 5.9). Se introduce un dieléctrico de constante K en uno de los condensadores de modo

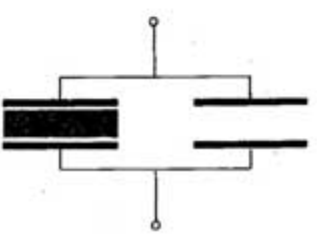


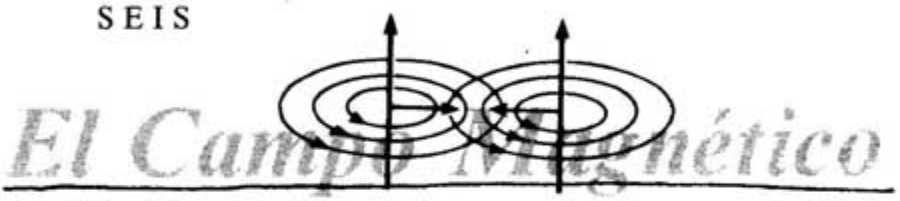
Fig. P 5.9

que llena completamente el espacio entre las placas. Calcular la cantidad de carga verdadera que pasa de un condensador al otro y la tensión final V_2 en los condensadores en función de C, V_1 y K.

5.10 La capacidad de un condensador se multiplica por un factor 1,5 cuando se llena completamente con un cierto material dieléctrico. Calcular la constante dieléctrica del material y su susceptibilidad eléctrica.

5.11 El ángulo de incidencia del campo eléctrico en la superficie plana de un dieléctrico es de 20°. Hallar el ángulo de refracción dentro del dieléctrico si la constante dieléctrica del medio es 1,25. Supóngase que fuera del dieléctrico existe el vacío.

SEIS



El Campo Magnético

6.1 Introducción

En los cinco primeros capítulos hemos estudiado los efectos de cargas en reposo. Este estudio de la electrostática forma una parte muy importante de nuestro curso, pero como veremos, aparecen muchos fenómenos enteramente nuevos cuando nos encontramos con cargas en movimiento. La teoría electromagnética proporciona un encuadre único para los fenómenos de electricidad y magnetismo a primera vista ampliamente divergentes. En primer lugar examinaremos los efectos de las cargas en movimiento llamados *magnetismo*, y más adelante veremos las ideas unificadoras de la teoría electromagnética.

Históricamente el magnetismo comenzó con el estudio de las interacciones entre sustancias ferromagnéticas: sustancias como el hierro que en condiciones apropiadas presentan enérgicas fuerzas de atracción y repulsión, que semejan, aunque son muy diferentes, a las fuerzas electrostáticas. Un primer ejemplo del conocimiento del magnetismo fue el empleo de un imán permanente en el campo magnético terrestre como brújula para navegación. En 1819, Oersted descubrió por primera vez la conexión entre electricidad y magnetismo, al observar el par que sobre una aguja imanada produce una

corriente eléctrica próxima. Dejaremos el estudio de los materiales magnéticos para más adelante, y, primero, discutiremos el magnetismo en función de las fuerzas que se ejercen entre las cargas en movimiento que constituyen las corrientes. Si el lector desea recordar los conceptos de corriente y densidad de corriente de los que hemos de hacer uso, se le remite a la primera parte del Cap. 7.

6.2 Fuerza magnética entre dos elementos de corriente

Introduciremos el estudio del magnetismo considerando la fuerza entre dos hilos paralelos situados en el vacío, y que llevan corrientes i_1 e i_2 respectivamente (Fig. 6.1). Como estudió Ampere por primera vez, el hecho experimental es que los dos hilos se atraen mutuamente. Si invertimos una de las corrientes la fuerza se convierte en repulsiva. Las fuerzas cambian si se modifica la intensidad de las corrientes, la forma o la posición relativa de los conductores.

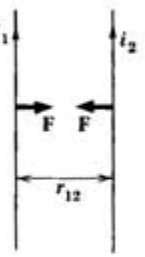


Fig. 6.1 Fuerzas mutuas de atracción entre dos hilos paralelos con corrientes del mismo sentido.

Al discutir este problema se presenta una dificultad. Todo elemento de corriente debe necesariamente formar parte de un circuito cerrado completo. Por tanto, una formulación realista debe contener solo las fuerzas entre dos circuitos completos. Sin embargo, podemos considerar el caso simplificado siempre que tengamos en cuenta que las comparaciones con los resultados experimentales exigen el cálculo de fuerzas sobre circuitos completos.

No hay posibilidad de confundir esta fuerza entre corrientes con las fuerzas electrostáticas. En primer lugar, no hay carga neta sobre los conductores. La densidad de carga de los electrones de conducción compensa exactamente la carga positiva de los iones de la red. Segundo, la fuerza cambia de signo cuando se invierte el *sentido* de cualquiera de las corrientes. La fuerza *magnética* está, pues, asociada con las cargas *en movimiento*.

Citemos brevemente el trabajo original de Ampere[1] en que describe las conclusiones que obtuvo de sus experimentos sobre las fuerzas entre corrientes:

[1] André Marie Ampere. Interacciones mutuas entre dos corrientes eléctricas, *Ann. chim. et phys.* (II) **15**:59-76 (1820).

He descubierto algunos ... [efectos] ... notables ... disponiendo en direcciones paralelas dos trozos rectilíneos de dos hilos conductores que unen los extremos de dos pilas voltaicas; uno de ellos estaba fijo y el otro, suspendido por dos puntos y muy sensible al movimiento por medio de un contrapeso, podía aproximarlo al primero o separarlo de él manteniéndose paralelos. Observé entonces que cuando hacía pasar una corriente eléctrica por ambos hilos se atraían al momento mutuamente cuando las dos corrientes eran en el mismo sentido, y se repelían mutuamente cuando eran en sentidos opuestos. Ahora bien, estas atracciones y repulsiones de las corrientes eléctricas difieren esencialmente de las que produce la electricidad en reposo; en primer lugar, cesan, como ocurre con las descomposiciones químicas, tan pronto como interrumpimos el circuito de cuerpos conductores; en segundo lugar, en las atracciones y repulsiones eléctricas ordinarias, las electricidades de distinta clase se atraen y las del mismo nombre se repelen; en las atracciones y repulsiones de las corrientes eléctricas tenemos precisamente lo contrario; ... En tercer lugar, en el caso de atracción, si es suficientemente fuerte para poner en contacto el conductor móvil con el fijo, permanecen unidos uno al otro como dos imanes y no se separan al cabo de un momento como ocurre cuando dos cuerpos conductores, que se atraen uno a otro porque están electrificados el uno positivamente y el otro negativamente, llegan a tocarse. Finalmente, y parece que esta última circunstancia depende de la misma causa que la precedente, dos corrientes eléctricas se atraen o se repelen lo mismo en el vacío que en el aire, que es lo contrario a lo que hemos observado en la acción mutua entre dos cuerpos conductores cargados con electricidad ordinaria. No es éste el lugar para explicar estos nuevos fenómenos; las atracciones y repulsiones que tienen lugar entre dos corrientes paralelas, según estén dirigidas en el mismo o en sentidos opuestos, son hechos dados por un experimento que es fácil repetir.

El hecho experimental es que la fuerza mutua entre un elemento de corriente $i_1\ dl_1$ (una corriente i_1 circulando por un hilo de longitud dl_1) paralelo a otro elemento de corriente $i_2\ dl_2$ y separado de

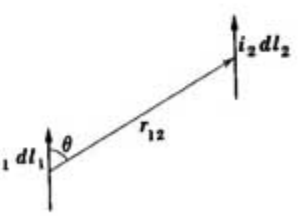


Fig. 6.2 Fuerza entre dos elementos de corriente paralelos $i_1\ dl_1$ e $i_2\ dl_2$ según la Ec. (6.1).

él por una distancia r_{12}, tal como se indica en la Fig. 6.2, viene dado por

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r_{12}^2}\, i_1\, dl_1\, i_2\, dl_2 \operatorname{sen}\theta \tag{6.1}$$

El valor de la fuerza entre dos elementos de corriente, a una distancia determinada, es una propiedad fundamental de la naturaleza. La constante de proporcionalidad es $\mu_0/4\pi$; el valor numérico de esta constante depende de las unidades de medida elegidas para la corriente, la distancia y la fuerza. En el sistema mks, vale

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \qquad \text{weberio/amperio-m}$$

y se llama *permeabilidad* del vacío. La Ec. (6.1) se refiere a un caso muy especial, el de elementos de corriente paralelos. Si solo hubiéramos de tratar con ellos esta ecuación sería la única necesaria. La expresión más complicada que vamos a describir a continuación, es necesaria para explicar cómo cambia la fuerza cuando los elementos de corriente forman un ángulo cualquiera entre sí. Esta expresión no contiene el campo magnético. Pero tanto en electrostática como en magnetismo se introducen los campos para simplificar los razonamientos. La Ec. (6.1) no puede emplearse directamente, puesto que en la práctica es imposible disponer de elementos de corriente aislados. Para poder usarla prácticamente, sería necesario integrar esta ecuación a todo el circuito tanto para i_1 como para i_2.

Vamos a formular de nuevo el problema en función del campo. Si el tratamiento matemático parece algo más complicado que en el caso de la electrostática, ello es debido exclusivamente a que la situación física misma es más compleja. El método que seguiremos consiste en describir el *campo de inducción magnética* (una magnitud vectorial **B**) debido a un elemento de corriente y después expresar la fuerza que aparece sobre otro elemento de corriente situado en dicho campo. Esto conduce al resultado general que deseamos, del cual la Ec. (6.1) es un caso particular.

Cuando se formulan en función del campo de inducción magnética los experimentos sobre la fuerza entre dos circuitos de corriente, pueden explicarse los resultados experimentales si se admite que cada elemento de corriente $i\,d\mathbf{l}$ da lugar a una contribución al campo de inducción magnética según la ecuación

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\,d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{6.2}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es un vector unitario, que tiene de módulo unidad, dirección y sentido la de la línea trazada *desde* el elemento de corriente *al* punto en el que se está calculando $d\mathbf{B}$. Esta es la llamada ley de Biot y Savart. En el sistema mks la unidad de **B** es el weber

por metro cuadrado, sobre la que insistiremos más adelante en este capítulo. De la Ec. (6.2) se deduce que la unidad para la permeabilidad μ_0 es el weber por ampere-metro, como antes pusimos. Como la Ec. (6.2) presenta el primer ejemplo que encontramos del *producto vectorial*, vamos a hacer una breve pausa para recordar las propiedades de éste.

El producto vectorial. La Ec. (6.2) expresa una relación bastante complicada entre las magnitudes y direcciones de los vectores $d\mathbf{B}$, $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$. Afortunadamente, la situación corresponde a una expresión matemática bien conocida. Para explicarla consideremos tres vectores **A**, **B** y **C**, relacionados por la ecuación $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, donde **A** se denomina producto vectorial de **B** y **C**.

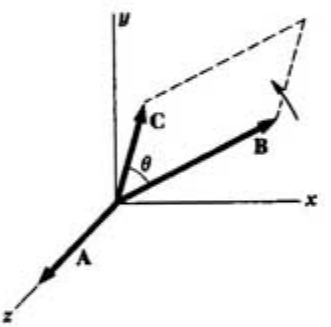


***Fig. 6.3** El vector* **A** *es el producto vectorial de los vectores* **B** *y* **C**: $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C} = BC \operatorname{sen} \theta$. **A** *es perpendicular al plano determinado por* **B** *y* **C** *y su módulo es igual al área del paralelogramo construido sobre* **B** *y* **C**.

En la Fig. 6.3 se han dibujado los vectores **B** y **C** en el plano xy de un sistema de coordenadas dextrorsum. El vector resultado **A** del producto vectorial **B** y **C** es perpendicular a ambos y, por tanto, en la dirección del eje z. El sentido de **A** se obtiene imaginando que el primer vector **B** gira alrededor de su origen hacia el segundo vector **C**, si este giro corresponde a la dirección de los dedos curvados de la mano derecha la dirección del vector resultado **A** es la del pulgar extendido. Este es el resultado indicado en la figura. Vemos, pues, que $\mathbf{B} \times \mathbf{C} = -(\mathbf{C} \times \mathbf{B})$, puesto que en el último caso es **C** el que debe girar hacia **B** y el pulgar indicaría en sentido opuesto.

El módulo del vector **A** es BC sen θ, siendo θ el ángulo que forman los dos vectores que intervienen en el producto vectorial. Este puede recordarse fácilmente notando que BC sen θ es el módulo de uno de los vectores por la componente del otro vector *perpendicular* al primero. Esta magnitud es el área del paralelogramo construido tomando los dos vectores como lados adyacentes, tal como indica la Fig. 6.3. Así, pues, el módulo del producto vectorial de dos vectores perpendiculares es igual al producto de los módulos de ambos vectores. El producto vectorial de dos vectores paralelos es cero.

Podemos ahora interpretar la Ec. (6.2) tomando como base el significado del producto vectorial. En primer lugar escribiremos dicha ecuación en la forma alternativa,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \tag{6.2a}$$

Que tiene el mismo significado que la Ec. (6.2) y se obtiene de ella sin más que recordar la relación entre $\hat{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{r}$

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

En la Fig. 6.4 se han dibujado los vectores $i\,d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$ en el plano del

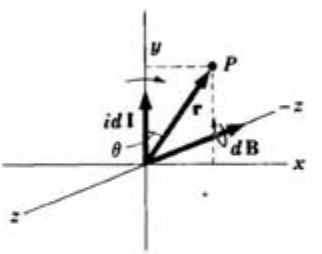


Fig. 6.4 dB es la contribución al campo de inducción magnética en el punto P del elemento de corriente i dl. dB es perpendicular a r y a i dl y está dirigido hacia dentro del papel.

papel. El vector resultante $d\mathbf{B}$, según la Ec. (6.2) o (6.2*a*), tiene por módulo

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\, i\, dl\, r \operatorname{sen}\theta = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}\, i\, dl \operatorname{sen}\theta$$

y está dirigido hacia dentro del papel en la dirección $-z$. Este es el valor de $d\mathbf{B}$ en el punto P, no en el punto donde concurren los dos vectores. Esto está implícito en la ecuación, en ella $\mathbf{r}$ es el vector *desde* el elemento de corriente *al* punto del espacio en que estamos calculando $d\mathbf{B}$. Tal como escribimos la Ec. (6.2), r^2 en el denominador es el módulo de esta distancia y $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector unidad que indica la dirección de $\mathbf{r}$. En efecto, $\hat{\mathbf{r}}$ se emplea únicamente para definir el ángulo θ. Es más corriente dibujar los vectores como se indica en la Fig. 6.5. Esta es completamente equivalente a la Fig. 6.4,

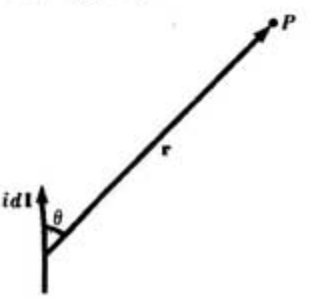


Fig. 6.5 Los vectores i dl y r determinan la contribución dB al campo en el punto P. dB en este punto es perpendicular a ambos y está dirigido hacia dentro del papel.

puesto que $i\,d\mathbf{l}$ es un vector de módulo infinitesimal. El vector $d\mathbf{B}$ en el punto P es perpendicular a $i\,d\mathbf{l}$ y a $\mathbf{r}$, y está dirigido hacia dentro del papel.

El hecho de que tengamos como en electrostática una ley de variación inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, nos conduce de nuevo a la utilidad del concepto de líneas de fuerza. Como las líneas del campo eléctrico, las líneas de la inducción magnética son continuas en el espacio, su dirección da la del campo, y su densidad la intensidad del mismo. Sin embargo, existe gran diferencia entre las configuraciones del campo eléctrico y del magnético en un aspecto. Las líneas magnéticas no tienen fuentes (como ocurre en el caso del campo eléctrico, en el que son las cargas), sino que son continuas y se cierran sobre sí mismas. Esto puede comprobarse examinando la Ec. (6.2) y la Fig. 6.5. En efecto, supongamos que el punto P se mueve alrededor del eje que pasa por la corriente manteniéndose a distancia constante de este eje. Según la Ec. (6.2) el vector inducción magnética $d\mathbf{B}$ es constante a lo largo de todo este recorrido y en cada punto es tangente a la trayectoria. Estas son precisamente las condiciones para que las líneas sean circunferencias concéntricas alrededor de la corriente. La Fig. 6.6

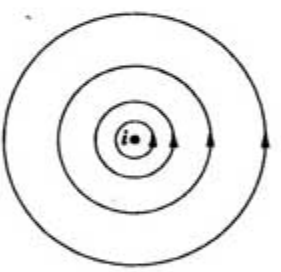


Fig. 6.6 Líneas de la inducción magnética alrededor de un hilo muy largo por el que circula la corriente hacia fuera del papel.

muestra algunas de las líneas alrededor de un elemento de corriente. Si se dispone la mano derecha de modo que el pulgar señale la dirección de la corriente (positiva), las líneas tienen la dirección de los demás dedos curvados alrededor del elemento de corriente. Esta *regla de la mano derecha* no es sino la expresión del producto vectorial dado por la Ec. (6.2).

Antes de integrar la Ec. (6.2) para obtener la configuración del campo alrededor de algunos circuitos, vamos a establecer la otra ley que debemos emplear si deseamos emplear el campo de inducción magnética $\mathbf{B}$ para calcular la fuerza entre elementos de circuito. Como resulta de los experimentos realizados sobre circuitos cerrados, la fuerza sobre un elemento de corriente $i\,d\mathbf{l}$, es

$$d\mathbf{F} = i\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{6.3}$$

Su módulo es, por tanto, $i\,dl\,B$ sen θ, y su sentido está dado por

$d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ (perpendicular al plano de $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{B}$), puede también hallarse por la regla de la mano derecha.

Apliquemos estas dos ecuaciones a los elementos de corriente paralelos de la Fig. 6.1. El primer paso, para calcular la fuerza entre los dos elementos de corriente, es determinar el campo de inducción magnética $d\mathbf{B}$ por ejemplo, debido a la corriente del conductor de la izquierda en el punto ocupado por el elemento de corriente de la derecha. Este campo vendrá dado por la Ec. (6.2) en la forma

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|i_1 \, d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} i_1 \, dl_1 \tag{6.4}$$

puesto que en este caso particular $i_1 d\mathbf{l}_1$ es perpendicular a $\mathbf{r}$. El vector $d\mathbf{B}$ es perpendicular al plano del papel ($\perp$ a $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$), según el producto vectorial estará dirigido hacia dentro del papel. (Recuérdese que el vector $\mathbf{r}$ tiene su origen en el elemento de corriente que crea el campo.)

A continuación, aplicamos al conductor de la derecha la Ec. (6.3) de la fuerza, obteniendo

$$dF = |i_2 \, d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B}| = i_2 \, dl_2 \, dB \tag{6.5}$$

por ser $i_2 \, d\mathbf{l}_2 \perp d\mathbf{B}$. Combinando las Ecs. (6.4) y (6.5) encontramos exactamente la misma expresión de la Ec. (6.1), para el caso en que θ, el ángulo entre $i \, d\mathbf{l}$ y $\mathbf{r}$, es de 90°. Hemos visto que en este caso sencillo el empleo de $\mathbf{B}$ era innecesario, pero en casos más complicados que veremos más adelante se justificará plenamente su uso.

De las expresiones de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{F}$ en forma vectorial es evidente que la expresión general para la fuerza entre dos elementos de corriente es

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_2 \, d\mathbf{l}_2 \times (i_1 \, d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12})}{{r_{12}}^2} \tag{6.6}$$

siendo $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ un vector unitario, dirigido *desde* el primer elemento de corriente *al* segundo. La complejidad de esta expresión que contiene dos productos vectoriales, es consecuencia de la complejidad de la naturaleza misma.

El resultado de la Ec. (6.6) viola aparentemente la tercera ley de Newton. En efecto, supongamos que los dos elementos de corriente están en el plano del papel, pero no son paralelos, tal como se indica en la Fig. 6.7. El campo $d\mathbf{B}$ en (2) estará en el plano del papel

Fig. 6.7 Fuerza entre dos elementos de corriente según la Ec. (6.6).

como antes, pero la fuerza sobre el segundo elemento tendrá una componente hacia la parte superior de la página, como asimismo ocurrirá con la fuerza sobre el primer elemento. Existiría, pues, una fuerza neta hacia arriba para este par de elementos de corriente. Esta dificultad se explica por el hecho de que en realidad la Ec. (6.6) solo es correcta cuando integramos la expresión a los circuitos completos de los que $i_1\, dl_1$ e $i_2\, dl_2$ son únicamente elementos diferenciales. Puede demostrarse que entonces la fuerza neta sobre el sistema completo es siempre cero. Desde el punto de vista experimental no existe dificultad alguna, puesto que es sencillamente imposible manejar elementos de circuito aislados. Siempre que las Ecs. (6.2) y (6.3) se emplean para determinar fuerzas sobre circuitos completos, la integración a estos circuitos conduce a una fuerza neta nula sobre el sistema en conjunto. Otro caso aparentemente perturbador es el de elementos de corriente que sean el resultado de cargas aisladas moviéndose con una velocidad v, en lugar de estar constituidas por un flujo continuo de cargas. También en este caso, como veremos más adelante, no existe dificultad real.

6.3 Ejemplos

En esta sección vamos a dar algunos ejemplos del cálculo de la inducción magnética **B** para conductores de forma sencilla.

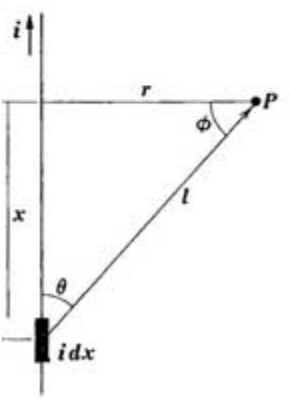


Fig. 6.8 Inducción magnética debida a la corriente que pasa por un hilo rectilíneo.

a) Cálculo de **B** *en las proximidades de un hilo rectilíneo muy largo que lleva una corriente i.* Tomemos un punto P a una distancia dada r del hilo (véase Fig. 6.8). Un elemento de corriente genérico $i\, dx$ se halla a una distancia l del punto elegido P. Aplicando la Ec. (6.2), encontramos

$$dB_p = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, dx \operatorname{sen} \theta}{l^2}$$

estando $d\mathbf{B}_p$ dirigido hacia dentro del papel. Antes de integrarla debemos expresar las variables l y θ en función de una sola variable. Es conveniente escoger el ángulo ϕ y escribir

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{l^2} \cos \phi$$

La suma vectorial de las contribuciones de los diferentes elementos de corriente a **B** es simplemente aritmética, puesto que todas las contribuciones $d\mathbf{B}$ apuntan en la misma dirección. La integración se extiende desde $-\pi/2$ a $+\pi/2$ para cubrir el hilo infinitamente largo. Para sustituir x y dx, haremos uso de las relaciones: $x = r$ tg ϕ, $dx = r \sec^2 \phi \, d\phi$, $l = r/\cos \phi$. Entonces resulta,

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \phi \, d\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad \text{weberio/m}^2 \tag{6.7}$$

Por tanto, las líneas de **B** forman circunferencias concéntricas alrededor del hilo. El campo disminuye con la distancia como $1/r$.

b) Cálculo de la inducción magnética en el eje de una espira circular. Consideremos un punto P del eje (véase Fig. 6.9) y vamos a calcular de nuevo

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \, d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{6.2}$$

Como para todos los elementos de la espira es, $\mathbf{r} \perp i \, d\mathbf{l}$, el sen θ en el producto vectorial valdrá 1 en este caso. Sin embargo, al realizar

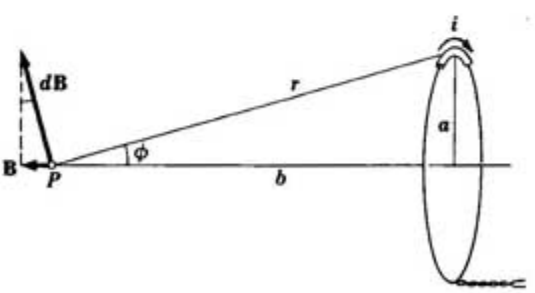


Fig. 6.9 Inducción magnética en el eje de una espira circular.

la suma vectorial de los diferentes $d\mathbf{B}$, debemos tomar en consideración el hecho de que cada $d\mathbf{B}$ es perpendicular a **r** en el punto P. Por simetría, las componentes de **B**, que no son paralelas al eje b, se compensan entre sí cuando se integra la expresión a toda la espi-

ra. Por tanto, el campo resultante se obtendrá sumando únicamente las componentes $d\mathbf{B}$ sen ϕ según el eje. Así, pues, B valdrá:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\text{sen } \phi}{r^2} \int dl$$

Donde hemos sacado fuera de la integral r y sen ϕ que son constantes. El elemento dl integrado a toda la espira vale $2\pi a$, y expresando sen ϕ y r en función de las constantes a y b hallamos,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad \text{weberio/m}^2 \tag{6.8}$$

En el centro de la espira, $b = 0$, y resulta $B = \mu_0 i/2a$, dirigido según el eje de la espira hacia uno u otro lado dependiendo del sentido de circulación de la corriente. Si se trata de una bobina formada por N espiras muy próximas, el resultado queda multiplicado por N. No hemos tenido en cuenta los conductores que llevan la corriente hasta la espira porque su contribución al campo puede hacerse extremadamente pequeña manteniéndolos muy próximos entre sí. Como las líneas de inducción magnética alrededor de estos hilos son circunferencias concéntricas en sentidos opuestos, se compensan muy aproximadamente si están muy juntos como ocurre en este caso.

Cuando el punto P está lejos de la espira ($b >> a$), puede escribirse la ecuación en la forma

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2iA}{r^3} \quad \text{weberio/m}^2 \tag{6.9}$$

en la que hemos llamado $A = \pi a^2$, al área de la espira. La magnitud iA se denomina *momento magnético dipolar* por razones que veremos más adelante cuando estudiemos con detalle el campo alrededor de una espira. Veremos que **B** a grandes distancias de la espira depende solo de su área y no de la forma de la espira.

El sentido de **B** depende del sentido de la corriente en la espira. Podemos ver en la Fig. 6.9 que, si miramos la espira desde la izquierda, una corriente circulando en sentido antihorario da lugar a un campo dirigido hacia el observador. Adoptaremos el convenio de signos de que B es positivo cuando *sale* de la espira hacia el observador y que la corriente es positiva cuando el observador la ve circular *contra las agujas del reloj*. Este convenio evita toda ambigüedad en la interpretación de ecuaciones como la (6.9).

c) *Cálculo del campo en el eje de un solenoide.* Una bobina arrollada en forma espiral sobre un cilindro se llama *solenoide.*[1] A fin de hallar el campo en un punto P del eje interior al solenoide (como se indica en la Fig. 6.10), haremos uso de los resultados del problema anterior del campo en el eje de una espira. En este caso ne-

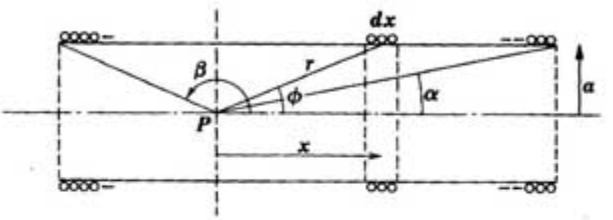


Fig. 6.10 Inducción magnética en el interior de un solenoide.

cesitamos conocer el número de espiras por unidad de longitud, y para ello llamaremos N al número total de espiras y L a la longitud del solenoide. Apliquemos la Ec. (6.8) a una sección del solenoide de longitud dx, en la que la corriente total será $i(N/L)\,dx$:

$$dB = \frac{\mu_0 N i}{2L} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx$$

Ahora debemos integrar esta ecuación y para ello escogemos como variable de integración el ángulo ϕ. Haciendo las sustituciones, $x = a \operatorname{ctg} \phi$ y $dx = -a \operatorname{cosec}^2 \phi \, d\phi$, la ecuación se transforma en

$$B = -\frac{\mu_0 N i}{2L} \int_{\beta}^{\alpha} \operatorname{sen} \phi \, d\phi = \frac{\mu_0 N i}{2L} (\cos \alpha - \cos \beta)$$

Si escogemos el punto P en el centro de un solenoide muy largo $\alpha = 0$ y $\beta = 180°$, con lo que resulta

$$B = \frac{\mu_0 N i}{L} \quad \text{weberios/m}^2 \tag{6.10}$$

Si P está en uno de los extremos del solenoide, tenemos $\alpha = 90°$ y $\beta = 180°$, y por tanto,

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2L} \quad \text{weberios/m}^2 \tag{6.11}$$

Es decir, el campo en un extremo de un solenoide muy largo es precisamente la mitad de su valor en el centro.

[1] Fue Ampere el primero que pensó en obtener campos magnéticos más intensos haciendo pasar la corriente por un hilo devanado formando una espiral muy apretada. Imaginó la bobina cilíndrica como un «canal» en el que permanecían confinadas las líneas del campo magnético. De ahí el nombre de *solenoide*, palabra griega que significa canal, que empleó.

Considerando de nuevo la Ec. (6.10) que nos da la inducción magnética en el interior de un solenoide muy largo, llamaremos a la magnitud Ni/L, *densidad de corriente solenoidal*. Representa la intensidad de la corriente que circula por metro de longitud de la bobina. El resultado sería el mismo si duplicamos el número de espiras por unidad de longitud y reducimos la corriente a la mitad de su valor original, o si hacemos cualquier otro cambio que mantenga constante el producto Ni/L. Podemos, pues, escribir

$$\frac{Ni}{L} = j^s \qquad \text{amperios/m o amperios-vuelta/m}$$

llamando j^s a la densidad de corriente solenoidal. Con esto la Ec. (6.10) se escribirá

$$B = \mu_0 j^s \qquad \text{weberios/m}^2 \tag{6.12}$$

Es preciso distinguir la densidad de corriente solenoidal de la densidad de corriente ordinaria j, que definiremos en la Sec. 7.2 como la corriente de volumen por unidad de sección transversal. Podemos también emplear aquí el convenio de signos según el cual una corriente antihoraria es positiva y que B es positivo cuando está dirigida desde la espira hacia el observador, para relacionar la dirección de B al sentido de rotación de la corriente.

6.4 Propiedades del campo de inducción magnética

Vamos a resumir en esta sección lo que ya conocemos sobre el campo magnético y añadir algo más que nos ayude a entender su naturaleza. Como en el caso del campo eléctrico, podemos representar la intensidad y dirección del campo magnético mediante el convenio de las líneas de fuerza. Esto lo relacionábamos con la ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia que rige para los elementos de corriente. También aquí, podemos emplear la *densidad de líneas* para describir la intensidad del campo magnético, y utilizar este punto de vista para realizar una determinación cuantitativa de la intensidad del campo. En el sistema mks una línea de inducción equivale a un *weber*. La unidad de intensidad del campo es el weber por metro cuadrado. Otra unidad todavía en uso es el *gauss* correspondiente al sistema electromagnético; un weber por metro cuadrado es igual a 10.000 gauss.

En principio, estamos definiendo las unidades de **B** a partir de la Ec. (6.2). Sin embargo, para utilizar la ecuación con estos fines, existen dos dificultades. Una de ellas es que se trata de una expresión diferencial que contiene la longitud dl. La otra es que tenemos que haber elegido la unidad para la corriente i antes de emplear la

expresión. Evitaremos estas dificultades del modo siguiente: Como demostraremos, es posible definir la unidad de intensidad de corriente, el *ampere*, en función de la fuerza magnética ejercida entre dos circuitos escogidos en forma adecuada, y entonces hacer uso de la Ec. (6.2) en un caso apropiado en el que ha sido integrada para determinar B en función de la intensidad de la corriente.

Vamos a definir primero la unidad de corriente. Ya hemos visto [al integrar la Ec. (6.2)] que el campo a una distancia a de un conductor rectilíneo muy largo por el que circula una corriente i es

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$$

formando las líneas de **B** circunferencias alrededor del hilo. Si tomamos dos hilos paralelos de longitud L y formamos con cada uno de ellos una espira circular, manteniéndolos a una distancia a pequeña comparada con el radio de las espiras (véase Fig. 6.11), seguirá cumpliéndose la misma ecuación para el campo en uno de los hilos debido a la corriente en el otro. Con esto hemos evitado la necesidad de un par de hilos indefinidos. Apliquemos a continuación la Ec. (6.3) para obtener la fuerza entre elementos de corriente, lo que nos da: $dF = i'\,dl\,B$, donde dl es el elemento de longitud del hilo sobre el que vamos a calcular la fuerza. Sustituyendo $B = \mu_0 i/2\pi a$ e integrando resulta

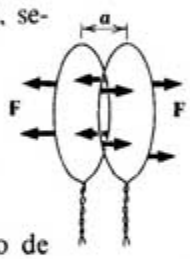


Fig. 6.11 Fuerza entre dos espiras paralelas separadas por una distancia a.

$$F = \frac{\mu_0 i' i \int dl}{2\pi a} = \frac{\mu_0 i' i L}{2\pi a} \quad \text{newtonios} \tag{6.13}$$

siendo L la longitud de cada espira. Si colocamos las dos espiras en serie será $i = i'$ y podemos basarnos en esta ecuación para establecer experimentalmente la unidad de corriente. Si medimos F en newtons y la longitud en metros, i vendrá dado en amperes. Una vez que somos capaces de medir la intensidad de la corriente en amperes, como hemos podido hacerlo con este par de espiras, podemos emplear para determinar B cualquiera de las expresiones que hemos calculado. Por ejemplo, usando una espira, ya hemos visto que el campo en su centro es $B = \mu_0 i/2r$, siendo r el radio de la espira.

Hemos conseguido, pues, definir la intensidad del campo magnético a partir de la fuerza entre dos circuitos que conducen una corriente. Conviene insistir en que *las líneas del campo magnético no* tienen la dirección de la fuerza sobre un elemento de corriente, sino que la dirección de ésta viene dada por el producto vectorial entre $d\mathbf{l}$ y $\mathbf{B}$.

El dispositivo experimental descrito anteriormente no solo nos relaciona $\mathbf{B}$ a la corriente, sino que fija también el valor de la unidad de carga en el sistema mks. Esto se consigue por medio de la relación dada en la Ec. (7.1), según la cual un ampere es igual a un culombio por segundo. De este modo es posible determinar el valor de $\mu_0/4\pi$ y relacionar así las unidades de electrostática con las magnéticas.

Pasemos ahora a considerar otra notable propiedad de las líneas de inducción magnética. Estas líneas son continuas; no parten de ninguna fuente del modo como las líneas del campo eléctrico lo hacen de las cargas; las líneas de inducción magnética son cerradas, sin principio ni fin. Esta propiedad nos va a permitir profundizar en nuestra visión de la naturaleza del campo magnético, e igualmente, a seguir un método extremadamente sencillo para calcular el campo magnético en algunas situaciones de gran simetría. Recordando la expresión que nos da el campo a una distancia r de un hilo de gran longitud recorrido por una corriente i,

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \qquad \text{weberios/m}^2$$

vemos que las líneas magnéticas son concéntricas alrededor del conductor. Tomemos una de las líneas, a distancia r del hilo, y calculemos la integral de línea $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ a lo largo de ella, comenzando en un punto cualquiera y volviendo al mismo punto. Como la trayectoria es en todos sus puntos paralela a $\mathbf{B}$, y es $B = \mu_0 i/2\pi r$, la integral puede hacerse en la forma

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \oint dl = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 i \quad \text{Ley de Ampère.} \tag{6.14}$$

siendo i la corriente total que atraviesa el camino de integración elegido. Esta es la llamada *ley de Ampere*. Aunque la integración se ha hecho aquí para una trayectoria circular, la Ec. (6.14) es válida cualquiera que sea la forma de la trayectoria cerrada. Esto puede comprobarse si suponemos que una trayectoria cualquiera alrededor del conductor se aproxima mediante segmentos que son, o arcos de

circunferencia con centro en el conductor o de dirección radial (véase Fig. 6.12). El valor de la integral para un segmento de arco dado depende exclusivamente del ángulo subtendido por el arco en el hilo, puesto que **B** disminuye como $1/r$, mientras que $d\mathbf{l}$ aumenta

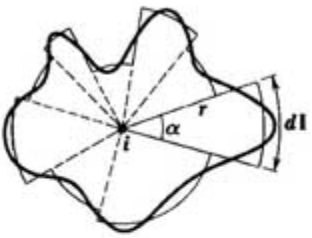


Fig. 6.12 Aproximación de una trayectoria cerrada arbitraria que rodea un conductor por medio de arcos circulares y segmentos radiales. Se emplea para demostrar que $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$ *para cualquier trayectoria cerrada atravesada por la corriente i.*

proporcionalmente a r. La contribución de los segmentos radiales a $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ es cero, puesto que **B** es en todos los puntos $\perp$ al radio vector. Por tanto, $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ es, sencillamente, la suma de los valores para todos los arcos de circunferencia, que es igual a la integral a lo largo de una circunferencia única completa. Cuando la corriente no está limitada a un solo hilo, puede considerarse constituida por una distribución de numerosos elementos de corriente, cada uno de los cuales contribuye con $d\mathbf{B}$ al campo total. La integral de línea estaría entonces formada por la suma de términos de la forma $\oint d\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0\, di$, que en conjunto dan el mismo resultado que la Ec. (6.14). Recordemos el resultado, semejante hasta cierto punto, para la integral de línea del campo eléctrico $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, que se obtuvo a partir de la conservación de la energía. En el caso del campo magnético, acabamos de ver que el resultado no es el mismo en general. Sin embargo, si se elige una trayectoria que no es atravesada por corriente alguna, por ejemplo, la trayectoria dibujada en la Fig. 6.13, la integral de línea

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{6.15}$$

exactamente igual que en el caso electrostático. En estas condicio-

Fig. 6.13 Trayectoria que no encierra corriente alguna; en ella $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

nes (y únicamente en ellas) podríamos definir un *potencial magnético* lo mismo que en el caso eléctrico. Sin embargo, no insistiremos más sobre esta cuestión.

6.5 Flujo de inducción magnética

Vamos a introducir en este momento una magnitud de importancia considerable, *el flujo de inducción magnética*, Φ. Representa el número total de líneas de inducción magnética que atraviesan un área dada. En efecto, esta definición corresponde a la ecuación

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \tag{6.16}$$

Ya que el valor de **B**, representa el número de líneas por unidad de área, siempre que se tome ésta, perpendicular a la dirección de **B**. La magnitud $d\mathbf{S}$ es un elemento de superficie (usando notación vectorial) y es positiva cuando está dirigida hacia el *exterior* (hacia el observador) de la superficie. Al expresar la ecuación como producto escalar, tomamos en consideración la posibilidad de que **B** pueda no ser perpendicular al área escogida. En el caso particular de que sí lo sea y además **B** sea uniforme, la Ec. (6.16) se reduce a $\Phi = BS$, siendo S el valor del área. Teníamos una expresión semejante en el flujo del campo eléctrico a través de un área dada, $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, aunque en el caso eléctrico no hubo necesidad de emplear un símbolo especial.

Como consecuencia del hecho de que las líneas de **B** se cierran sobre sí mismas y, por tanto, no tienen fuentes, será

$$\int_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{6.17}$$

para *cualquier* superficie cerrada, en contraste con el caso de las líneas de **E**.

6.6 Cálculo de algunos campos

Vamos a aplicar a continuación la integral de línea desarrollada en la Sec. 6.4 al cálculo del campo debido a dos configuraciones de corrientes de gran simetría, que ya habíamos calculado anteriormente, integrando la ecuación fundamental,

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{6.2}$$

a) Campo magnético de un conductor rectilíneo muy largo por el que circula una corriente i. Para este caso únicamente necesitamos invertir el razonamiento seguido en la Sec. 6.4. Vamos a indicarlo aquí solamente por claridad. Tomemos un camino circular de radio r alrededor del conductor. Como sabemos que **B** es constante y tiene la dirección de la trayectoria en todos sus puntos, podemos sacar **B** fuera de la integral y escribir

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B2\pi r = \mu_0 i$$

o sea

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

idéntico al anterior resultado.

b) Campo interior a un solenoide muy largo. Consideraremos primero un solenoide en forma de toro circular tal como se ha esquematizado en la Fig. 6.14. Sea a el radio medio del toro y N el número

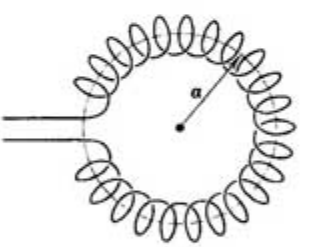


Fig. 6.14 Solenoide toroidal.

de vueltas del hilo que conduce una corriente i. La longitud media del solenoide será $2\pi a$. Elegimos un camino señalado por la línea de la circunferencia media, en todo el cual podemos ver que por simetría el campo **B** tendrá el mismo valor y una dirección tangente a la trayectoria. La corriente total que atraviesa este camino será Ni, puesto que todas las espiras llevan la corriente en la misma dirección respecto al camino que hemos elegido. Las corrientes en la parte exterior del toro están fuera de la trayectoria escogida y, por tanto, no es necesario tenerlas en cuenta. La integral de línea se convierte en

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B \oint dl = B2\pi a = \mu_0 Ni$$

o sea $B = \dfrac{\mu_0 Ni}{2\pi a} = \dfrac{\mu_0 Ni}{L} = \mu_0 \bar{f}$, el resultado que habíamos encontrado anteriormente para un solenoide recto muy largo, siendo $\bar{f}$ la densidad de corriente solenoidal. Si abrimos el toroide para for-

mar un solenoide recto, el campo en su centro no quedará seriamente afectado, aunque, como ya hemos visto, el campo en los extremos se reduce a la mitad. A pesar de que este nuevo método es solo aproximado, nos proporciona un dato que no obtuvimos en el cálculo directo: El campo en un punto de la región central del solenoide es el mismo esté o no sobre el eje de la bobina. En otras palabras, mientras nos mantengamos alejados de los extremos, el campo es uniforme en el interior del solenoide.

6.7 Par sobre una espira situada en un campo magnético uniforme. Dipolo magnético

Ahora que podemos dar por terminada nuestra discusión sobre la producción de campos magnéticos por corrientes, volvamos de nuevo al estudio de las fuerzas sobre conductores por los que circula corriente. Centremos nuestra atención en un caso de geometría sencilla, una espira rectangular tal como la que se indica en la Fig. 6.15.

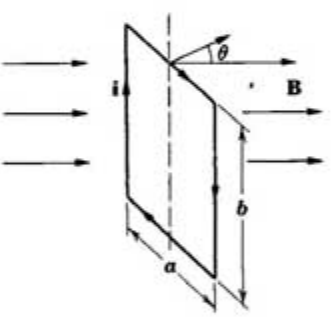


Fig. 6.15 Espira rectangular en un campo magnético uniforme.

La espira puede girar alrededor de un eje que es perpendicular a la inducción magnética uniforme **B**, y la normal a la espira forma un ángulo θ con la dirección del campo. Vamos a demostrar que, en el caso especial de un campo uniforme la fuerza neta sobre la espira es cero, y que sobre ella aparece un par. Supongamos que la corriente i que circula por la espira lo hace en el sentido de las agujas del reloj vista desde la izquierda de la Fig. 6.15; tanto i como **B** serán negativos (en el sentido de nuestro convenio de signos previo para **B** e i) cuando miremos la espira desde la izquierda y positivos si lo hacemos desde la derecha.

Aplicando la ecuación de la fuerza (6.3) a los lados superior e inferior de la espira, tenemos

$$\mathbf{F} = (i\mathbf{a} \times \mathbf{B}) \qquad \text{o} \qquad F = iaB \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = iaB \cos\theta \tag{6.18}$$

que estará dirigida hacia arriba en el tramo superior y hacia abajo en el inferior, como se deduce al aplicar la regla del producto vec-

torial. La fuerza neta debida a estos lados si la espira es rígida resulta, pues, cero, así como el par. Aplicando la misma ecuación a los lados verticales, encontramos

$$F = ibB \tag{6.19}$$

siendo de nuevo las fuerzas iguales; aunque son opuestas por estar dirigidas hacia afuera tiene componentes perpendiculares al plano de

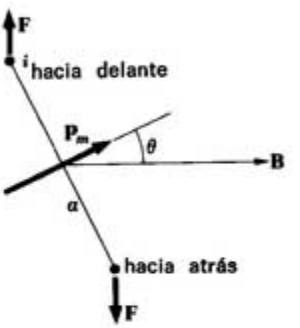


Fig. 6.16 Espira rectangular en un campo magnético uniforme vista desde arriba. La normal al plano de la espira forma un ángulo θ con el campo magnético.

la espira, por lo que el par no resulta cero. De la Fig. 6.16, que es una vista de la espira desde arriba, deducimos que el par vale

$$\tau = iabB \operatorname{sen} \theta = iBA \operatorname{sen} \theta \tag{6.20}$$

siendo A el área de la espira ab. Si se trata de una bobina de N vueltas muy juntas, la ecuación se convierte en

$$\tau = NiAB \operatorname{sen} \theta \tag{6.21}$$

y si llamamos, como en la Sec. 6.3

$$NiA = p_m \tag{6.22}$$

al momento magnético dipolar, la ecuación se convierte en

$$\tau = p_m B \operatorname{sen} \theta \tag{6.23}$$

El momento magnético dipolar p_m puede considerarse como una magnitud vectorial situada en el centro de la espira y dirigida en la dirección del flujo de inducción magnética. Desde este punto de vista, la Ec. (6.22) da no solo el módulo, sino también la dirección de p_m. En efecto, si miramos la espira desde un punto tal que vemos circular la corriente en contra de las agujas del reloj (positiva), la inducción magnética debida a esta corriente así como el momento dipolar están dirigidos hacia afuera (hacia el observador). Este análisis detallado nos muestra que el par debido a un campo mag-

nético aplicado exteriormente, tiende a orientar el momento magnético dipolar paralelamente al campo exterior. Esta conducta es la misma que en el caso eléctrico en el que el dipolo eléctrico, considerado como un vector dirigido de los extremos − a + del dipolo, tiende a alinearse paralelamente a un campo eléctrico exterior.

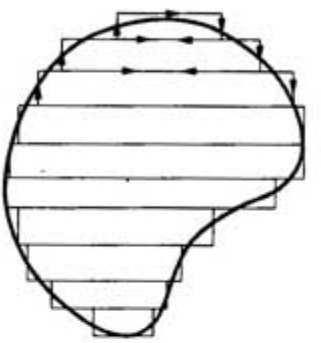


Fig. 6.17 Espira descompuesta en muchas espiras rectangulares elementales. Se compensan los efectos de todas las corrientes excepto las de la periferia.

La justificación de emplear el símbolo p_m para representar NiA es que, cualquiera que sea la forma de la espira, el par depende exclusivamente de NiA y no de la forma. Podemos demostrar esto tomando una espira de forma arbitraria y considerándola aproximadamente como suma de varias espiras rectangulares, tal como se indica en la Fig. 6.17. Si por todas las espiras rectangulares se hace pasar la misma corriente en el mismo sentido, las corrientes correspondientes a lados interiores se compensan mutuamente, dejando únicamente la corriente periférica que puede aproximarse a la espira original tanto como deseemos. El par total será entonces la suma de los pares sobre cada una de las espiras rectangulares y, por tanto, debe depender exclusivamente del área total del circuito y de la intensidad de la corriente.

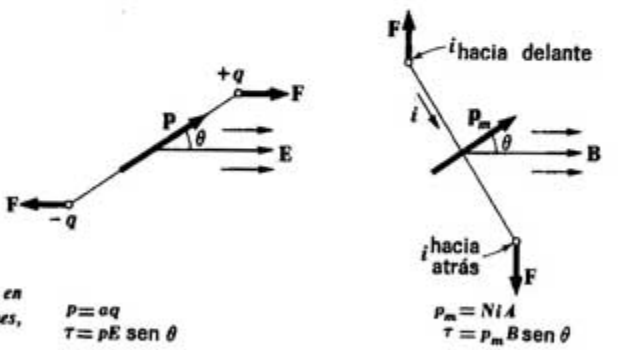


Fig. 6.18 Dipolos eléctrico y magnético en campos eléctrico y magnético uniformes, respectivamente.

La Fig. 6.18 nos sirve para llamar la atención sobre el gran paralelismo que existe entre un dipolo eléctrico en un campo eléctrico y una espira en un campo magnético. A fin de hacer más semejantes

los dos casos, debemos tomar como eje del momento dipolar de la espira la dirección de la normal al plano de la espira. El sentido del momento magnético dipolar es tal, que está dirigido hacia un punto desde el que la corriente se vea circular en sentido antihorario.

En realidad, la semejanza formal entre estas dos magnitudes tan diferentes, el dipolo magnético y el electrostático, va aún más lejos. Hemos encontrado que el campo magnético en el eje de una espira o dipolo magnético está dado por la expresión

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_m}{r^3} \tag{6.9}$$

Anteriormente, habíamos hallado para el campo eléctrico en el eje de un dipolo eléctrico

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3} \tag{2.5}$$

y ambas expresiones son muy semejantes. La comparación no se limita al eje del dipolo, sino que existe la misma semejanza en todos los puntos del espacio que rodea al dipolo, en tanto que nos mantengamos lo bastante alejados para que sean válidas las aproximaciones matemáticas que hicimos en el caso electrostático. Es evidente que a distancias comparables a las dimensiones de los dipolos los campos tienen forma diferente. Con el fin de poder comparar damos a continuación las expresiones semejantes eléctrica y magnética, válidas para grandes distancias, que dan las componentes tangencial y radial de los campos. Aunque no hemos demostrado las ecuaciones correspondientes al caso magnético las incluimos de todos modos.

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3}\cos\theta \qquad & B_r &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_m}{r^3}\cos\theta \\ E_\theta &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p}{r^3}\operatorname{sen}\theta \qquad & B_\theta &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_m}{r^3}\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{6.24}$$

El ángulo θ en estas ecuaciones es el que forma el momento dipolar con la dirección del radio vector (véase Fig. 3.8).

6.8 Fuerzas sobre cargas aisladas en movimiento

Nuestra tarea inmediata, el calcular las fuerzas magnéticas sobre cargas individuales en movimiento, es relativamente sencilla, ya que hemos analizado las fuerzas sobre elementos de corriente y éstos están constituidos por el flujo de cargas discretas. El problema consiste en modificar

$$d\mathbf{F} = i\,d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{6.3}$$

para que sea aplicable a una carga aislada e, que se mueva con velocidad v. A fin de conseguirlo, adelantemos uno de los resultados del capítulo próximo que relaciona la intensidad de la corriente con el movimiento de un grupo de cargas. La Ec. (7.5) nos da la expresión de la corriente i, correspondiente al movimiento de N cargas por unidad de volumen con velocidad media $\mathbf{v}$, a través de un conductor de sección transversal A.

$$i = NevA \tag{7.5}$$

Sustituyendo esto en la ecuación de la fuerza sobre un elemento de corriente [Ec. (6.3)], obtenemos

$$d\mathbf{F} = NeA\, dl\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Que es la fuerza sobre la carga total $NeA\, dl$. Dividiendo por $NA\, dl$, tendremos la fuerza sobre una sola carga e:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{6.25}$$

La fuerza resulta en newtons, si la carga se mide en culombios, la velocidad en metros por segundo, y $\mathbf{B}$ en webers por metro cuadrado.

Vamos a ver a continuación algunas consecuencias de esta fuerza sobre cargas aisladas. Podríamos haber empezado por establecer esta última relación como la ecuación fundamental entre fuerza y campo, y después haber deducido la ecuación de la fuerza para un elemento de corriente. La elección realizada fue esencialmente arbitraria.

La primera y más evidente conclusión de la Ec. (6.25) es que un campo magnético actuando sobre una partícula cargada en movimiento no puede modificar la energía cinética, o velocidad de la partícula. Esto se deduce de la naturaleza del producto vectorial, que da lugar a una fuerza resultante que es siempre perpendicular a la dirección de movimiento. Esto significa que el campo magnético no puede realizar trabajo sobre una partícula cargada, aunque sí puede cambiar la dirección de su movimiento.

Otro resultado de que los vectores fuerza magnética y velocidad sean mutuamente perpendiculares, es que en un campo magnético uniforme el movimiento de las partículas cargadas es circular o helicoidal. Consideremos en primer lugar una partícula de carga posi-

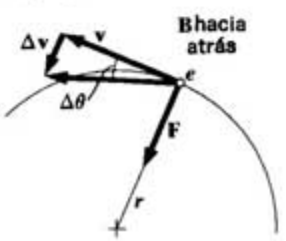


Fig. 6.19 Trayectoria de una partícula cargada en movimiento en el seno de un campo magnético perpendicular.

tiva q moviéndose en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme que, en la Fig. 6.19, se ha supuesto dirigido hacia dentro del papel. En un tiempo Δt la carga adquiere una velocidad transversal v, que puede obtenerse de $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, haciendo uso de la ecuación $F\,dt = m\,dv$:

$$\Delta v = \frac{qvB}{m}\,\Delta t$$

El cambio de dirección de v vendrá dado por

$$\Delta\theta = \frac{\Delta v}{v} = \frac{qB}{m}\,\Delta t$$

y, por tanto, la velocidad angular

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{qB}{m} \tag{6.26}$$

Como $\mathbf{v}$ permanece constante en módulo, y la variación de dirección es uniforme, la órbita debe ser circular. El radio de curvatura puede calcularse por la ley de Newton, $F = ma = mv^2/r$, siendo la fuerza centrípeta la debida al campo magnético. Así, pues, tendremos

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \qquad \text{o} \qquad r = \frac{mv}{qB} \tag{6.27}$$

En el caso más general en que la velocidad no está limitada al plano perpendicular a **B**, la Ec. (6.25) demuestra que la componente de la velocidad según dicho plano debe comportarse como indica la Ec. (6.27) mientras que la componente paralela a **B** permanecerá inalterada. Por tanto, si existe esta componente de la velocidad paralela a **B**, la órbita será una hélice.

Una importante consecuencia final de la naturaleza de la fuerza magnética sobre cargas en movimiento, es que en un campo uniforme la frecuencia de rotación de una carga es constante independientemente del valor de su velocidad. Ya hemos visto esto en la forma de la Ec. (6.26), y también puede deducirse de la Ec. (6.27) si sustituimos $r\omega = v$, y despejamos ω, con lo que se obtiene de nuevo la Ec. (6.26). Esta ecuación suele llamarse del *ciclotrón* por razones que veremos más adelante.

Vamos ahora a considerar la dificultad mencionada en la Sec. 6.2, relativa a la fuerza neta debida a la interacción magnética entre dos cargas en movimiento. Cuando las dos cargas se mueven a lo largo de dos rectas paralelas, puede demostrarse que las fuerzas de interacción son iguales y opuestas, como vimos que era el caso de las fuerzas entre dos elementos de corriente. Sin embargo, si el movimiento no es según trayectorias paralelas, parece existir una fuerza

neta sobre el sistema, como sugería nuestra discusión anterior y la Fig. 6.7. Esta aparente contradicción de la tercera ley de Newton queda resuelta cuando tomamos en cuenta la cantidad de movimiento adicional que debe asociarse al campo *electromagnético* de las cargas en movimiento. Cuando se considera esta cantidad de movimiento adicional, la cantidad de movimiento total de un sistema de dos o más partículas cargadas en movimiento resulta ser constante.

6.9 Aplicaciones

En esta sección vamos a discutir algunas aplicaciones importantes de la ley que da la fuerza magnética sobre partículas cargadas en movimiento.

Selector de velocidades. En un gran número de experiencias en que se desea estudiar el movimiento de electrones o iones, resulta de interés el disponer de una fuente de partículas que tengan todas la misma velocidad. Como la mayor parte de las fuentes de electrones e iones emiten partículas en un amplio margen de velocidades, es esencial disponer de un selector de velocidades. Es fácil entender el comportamiento de tal selector (Fig. 6.20), que hace uso de fuerzas

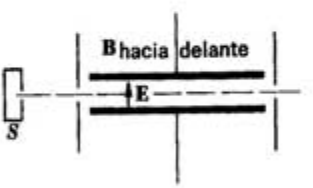


Fig. 6.20 Selector de velocidades mediante campos **E** *y* **B** *cruzados.*

eléctricas y magnéticas combinadas. Un dispositivo en forma de condensador plano proporciona un campo eléctrico uniforme **E** en el plano del papel y dirigido hacia arriba. También se establece un campo **B** uniforme perpendicular al papel. El haz de partículas cargadas que emerge de la rendija S de la fuente alcanzarán la rendija de salida únicamente si las fuerzas eléctricas y magnéticas que actúan son iguales y opuestas. Esto exige que sea

$$Eq = qvB \tag{6.28}$$

para el caso que consideramos. Así, pues, solamente las partículas cargadas con velocidad

$$v = \frac{E}{B} \tag{6.29}$$

conseguirán salir por la rendija.

Determinación de e/m. En el desarrollo de nuestros conocimientos sobre la estructura del átomo, ha sido fundamental la determinación de la relación e/m para iones y electrones. Tal determinación es posible si los iones que han atravesado un selector de velocidad se hacen describir una trayectoria circular en un campo magnético uniforme. Utilizando un detector de iones adecuado y una rendija puede determinarse el radio de curvatura de la trayectoria del ion o electrón. El conocimiento de la velocidad permite entonces calcular e/m. En efecto, como $r = mv/eB$ [Ec. (6.27)] y $v = E/B$ [Ec. (6.29)], tendremos

$$\frac{e}{m} = \frac{E}{rB^2} \tag{6.30}$$

J. J. Thomson empleó este método en 1897 en el Laboratorio Cavendish de la Universidad de Cambridge (Inglaterra) para medir la relación e/m para los electrones. En la forma utilizada para el estudio de iones cargados, este aparato se llama *espectrógrafo de masas*. Los estudios de la relación e/m para iones han aclarado muchos aspectos importantes de la estructura del átomo, entre ellos la existencia de los isótopos.

El ciclotrón. Probablemente la más conocida de todas las máquinas aceleradoras de partículas (iones) es el ciclotrón, que aprovecha las fuerzas eléctricas y magnéticas sobre los iones. Estos emergen de una fuente central y son obligados a moverse según trayectorias circulares por un campo magnético perpendicular a la dirección de su movimiento. Este movimiento tiene lugar dentro de dos electrodos huecos entre los que se aplica una tensión alterna. Los iones que son emitidos en el momento adecuado están sometidos a un campo acelerador cada vez que pasan de un electrodo al otro. Estos iones describen órbitas cada vez más grandes a medida que ganan energía cinética. A pesar de ello, continúan en fase con la tensión alterna, puesto que su velocidad angular es constante [Ec. (6.26)]. En la Fig. 6.21 se ha dibujado un esquema del ciclotrón.

Para energías mayores que unos 20 millones de electrón-voltios (Mev) este ciclotrón ordinario falla debido a la variación relativista de la masa de las partículas aceleradas. Como consecuencia la velocidad angular de las partículas que viene dada por la Ec. (6.26) cambia a energías elevadas y la partícula no permanece en sincronismo con la tensión alterna aplicada. Se han desarrollado máquinas en las que se evita esta dificultad modificando adecuadamente la intensidad del campo magnético o la frecuencia de la tensión aceleradora a medida que las partículas aumentan su energía. Máquinas de este tipo, como el sincrotrón de protones, producen partícu-

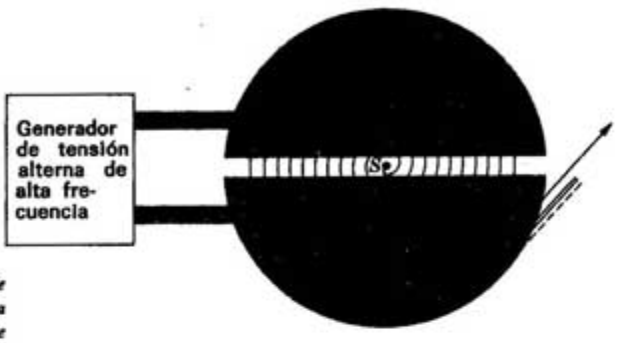


Fig. 6.21 El ciclotrón. Vista superior de los electrodos del ciclotrón, situados en una cámara en la que se ha hecho el vacío, entre los polos de un electroimán. Los iones positivos emitidos por la fuente S viajan en órbitas circulares perpendicularmente al campo magnético en el interior de los electrodos huecos. Cada vez que los iones atraviesan la región situada entre los electrodos son acelerados por la diferencia de potencial establecida por la tensión alterna aplicada en sincronismo con el movimiento de los iones. A medida que los iones ganan energía, el radio de su trayectoria aumenta, hasta que son desviados fuera de la región en que hay campo magnético por medio de una placa cargada negativamente.

las con energías comprendidas entre 1 y 10.000 millones de electrón-voltios (1 Bev = 10^9ev).

Efecto Hall. El efecto Hall está relacionado con la generación de una diferencia de potencial en un conductor, por el que circula una corriente, cuando se coloca en un campo magnético. De este efecto pueden obtenerse valiosos datos sobre la naturaleza de las partículas responsables de la corriente en el conductor. En la Fig. 6.22 se

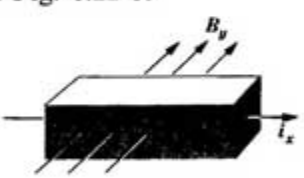


Fig. 6.22 Relaciones geométricas entre las magnitudes que intervienen en el efecto Hall transversal.

muestra el dispositivo empleado para poner de manifiesto el efecto Hall transversal. Cuando se encuentran en un campo magnético B_y los portadores de la corriente i_x resultan desviados (como se indica aquí para electrones) hasta que las cargas desviadas dan lugar a un campo transversal E_z. Este campo se llama de Hall y su valor se obtiene mediante la ecuación

$$eE_z = e|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = evB \tag{6.31}$$

Si expresamos la densidad de corriente, j (corriente por unidad de

sección transversal tal como se define en la Sec. 7.2), en función de la densidad de portadores N, su carga e y su velocidad media v,

$$\mathbf{j} = Ne\mathbf{v} \tag{7.4}$$

podemos expresar la constante de Hall R_H en la forma

$$R_H = \frac{E_z}{jB} = \frac{1}{Ne} \tag{6.32}$$

Esta constante puede determinarse experimentalmente midiendo la *tensión de Hall* (de la que puede deducirse el valor de E_z), la densidad de corriente y la intensidad del campo magnético. El signo y la magnitud de la constante de Hall dan el signo de los portadores de corriente y su densidad. Se ha encontrado que para la mayoría de los metales los portadores son electrones, y que en muchos casos la densidad de portadores está en buen acuerdo con el número de electrones de valencia en los átomos que forman el metal. Sin embargo, existen casos en los que los portadores son positivos (por ejemplo, Be, Zn, Cd) y para el Bi un valor muy grande del coeficiente de Hall que conducirá a una concentración de electrones anormalmente baja ($\sim$0,004 electrones por átomo). Estos resultados tan sorprendentes son explicables al menos cualitativamente y están relacionados con la naturaleza cuántica de los sólidos. Otro resultado importante de las medidas del efecto Hall en metales es que N, la densidad de portadores de carga, solo varía ligeramente con la temperatura.

PROBLEMAS

6.1 Dos hilos paralelos muy largos están separados 10 cm y por cada uno de ellos, pasa una corriente de 10 amp en el mismo sentido. Calcular la fuerza por unidad de longitud entre los dos hilos.

6.2 Hallar el campo de inducción magnética en el centro de una espira cuadrada cuyos lados miden 10 cm y por la que pasa una corriente de 10 amp.

6.3 Por un conductor de sección transversal circular y radio a circula una corriente de densidad uniforme j. Hallar el campo de inducción magnética a una distancia cualquiera r del centro del conductor.

6.4 En un conductor tal como el del Prob. 6.3, ¿existe alguna fuerza magnética que tienda a concentrar la corriente y hacer que j no sea uniforme? Explíquese. ¿Hay alguna otra fuerza en el conductor que tienda a estabilizar la densidad de corriente e impedir la concentración de la misma?

6.5 Un hilo muy largo tiene un bucle semicircular de radio r como se indica en la Fig. P 6.5. Si circula una corriente i, hallar el campo de inducción magnética en el centro de curvatura del bucle.

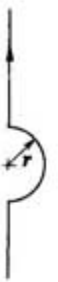


Fig. P 6.5

6.6 Una cinta conductora larga y delgada de anchura b lleva una corriente de i amp. Calcular el campo de inducción magnética en el plano del conductor, y fuera de él, a una distancia a del borde más próximo.

6.7 En la línea coaxial indicada en la Fig. P 6.7 circula la misma corriente i por el conductor interior, de radio a, que por el conductor exterior, de radio interior b y exterior c, pero en sentidos contrarios. Calcular el campo de inducción magnética a una distancia r del eje. (Empléese la ley de Ampere.)

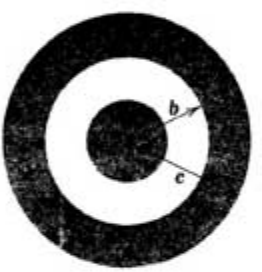


Fig. P 6.7

6.8 Un hilo de 10 cm de largo puede deslizarse sobre dos varillas paralelas que forman un ángulo de 45° con la vertical, como se indica en la Fig. P 6.8. Estas varillas están conectadas a un generador de modo que circula por la varilla una corriente i_1. Otro conductor muy largo, fijo y paralelo al hilo móvil lleva una corriente i_2 en sentido contrario. Llamando mg al peso de la varilla móvil expresar la distancia de equilibrio entre los dos conductores.

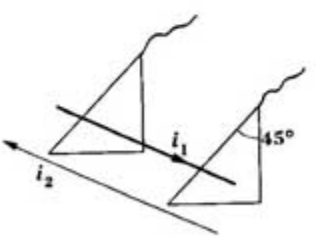


Fig. P 6.8

6.9 Un solenoide de 20 cm de longitud y radio 2 cm está formado por 3.000 espiras devanadas uniformemente. Por la bobina circula una corriente de 2 amp.

a) ¿Cuál es la densidad de corriente solenoidal j?
b) ¿Cuál es el valor de B en el eje del solenoide y en su centro?
c) ¿Cuál es el valor de B en el eje del solenoide y en uno de sus extremos?
d) ¿Cuál es el flujo Φ que atraviesa la bobina en el centro?
e) ¿Cuál es el flujo Φ que atraviesa uno de los extremos?

6.10 Un disco circular aislante de radio a lleva uniformemente distribuida una carga estática de σ culombios/m^2. Si el disco gira con una velocidad angular ω, calcular el campo de inducción magnética en su centro.

6.11 Hallar el valor de la inducción magnética a una distancia b del disco que gira del Prob. 6.10, sobre el eje de rotación y siendo $b >> a$.

6.12 Dos bobinas circulares formadas por N espiras muy próximas son coaxiales y están separados por una distancia b. Hallar la fuerza entre las dos bobinas cuando por ellas circula una corriente i.

6.13 El eje de una bobina circular de 10 cm de radio forma un ángulo θ con la dirección de un campo uniforme B. Si la bobina tiene 10 espiras y circula una corriente de 5 amp, hallar el par ejercido sobre la misma.

6.14 Una bobina toroidal de radio interior 5 cm y radio exterior 6 cm tiene 1.000 espiras devanadas uniformemente y por ella pasa una corriente de 5 amp.
   a) Hallar el valor medio del campo de inducción en la bobina empleando la ley de Ampere.
   b) Hallar el campo de inducción magnética en la bobina a una distancia de 5,1 cm del eje del toroide.

6.15 Por el conductor rectilíneo de la Fig. P 6.15 pasa una corriente de 10 amp. Calcular el flujo total que atraviesa el área *abcd*.

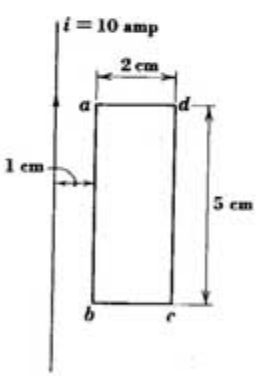


Fig. P 6.15

6.16 La espira rectangular de la Fig. P 6.15 conduce una corriente de 10 amp en el sentido de las agujas del reloj. Hallar en magnitud y dirección la fuerza que actúa sobre la espira debida al campo magnético de la corriente de 10 amp que pasa por el conductor rectilíneo si está dirigida hacia arriba.

6.17 En un experimento sobre el efecto Hall se hace pasar una corriente de 10 amp por un conductor de sección cuadrada de 0,5 cm de lado. La tensión inducida por un campo magnético de 2 weber/m^2 es de 2,5 $\times$ 10^{-6} voltios. Calcular la constante R_H de Hall. Si se supone que los portadores de la corriente son elec-

trones, hallar el valor de N, la densidad de electrones en el conductor. Trazar un esquema que indique las direcciones relativas de la corriente, el campo de inducción magnética B y el campo de Hall E_z.

6.18 ¿Cuál sería el efecto Hall transversal para un conductor que tenga la misma densidad de partículas positivas y negativas portadoras de la corriente?

6.19 El campo magnético de un ciclotrón tiene el valor de 0,5 weber/m^2. ¿Cuál debe ser la frecuencia de la tensión alterna aplicada a los electrodos para que las alternancias del potencial de éstos tengan lugar en sincronismo con el movimiento de iones de hidrógeno? ¿Cuál será la energía de los iones en julios y en electrón-voltios cuando el radio de su trayectoria es de un metro? ¿Cuántas revoluciones habrán de dar los iones para adquirir esta energía si la máxima diferencia de potencial entre los electrodos es de 20.000 voltios?

6.20 Un átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón a $0,5 \times 10^{-10}$ m de distancia. Suponiendo que el electrón se mueve en órbita circular alrededor del protón con una frecuencia de 10^{13} vueltas por segundo, calcular el valor del campo magnético debido al electrón en el punto que ocupa el núcleo.

6.21 Las bobinas de Helmholtz constituyen un procedimiento de obtener un campo uniforme en una región relativamente grande. Como se indica en la Fig. P 6.21, para conseguirlo se disponen dos bobinas que llevan la misma corriente sobre un eje común y separadas por una distancia igual a su radio. Demostrar que en el punto P del eje esta disposición geométrica hace que dB/dx y d^2B/dx^2 sean cero.

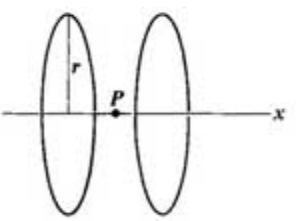


Fig. P 6.21

6.22 Tomando el radio terrestre igual a 6.400 km y la componente horizontal del campo magnético terrestre en el ecuador $0,4 \times 10^{-4}$ weber/m^2, ¿cuál será la velocidad mínima que debería tener un protón para poder rodear la tierra siguiendo el ecuador?

6.23 Un ion que parte del reposo en el vacío es acelerado por dos placas paralelas entre las que existe una diferencia de potencial de 1.000 voltios como se indica en la Fig. P 6.23. Al salir de la segunda placa, el ion se mueve bajo la acción de un campo magnético de 0,1 weber/m^2, perpendicular a su trayectoria. Si el radio de curvatura de ésta es 0,3 m, ¿cuál será la masa del ion si su carga es la del electrón?

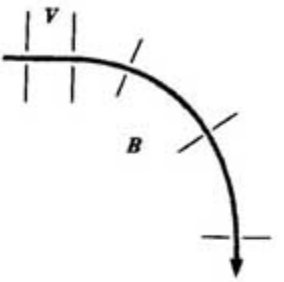


Fig. P 6.23

6.24 Calcular la tensión mecánica a que está sometida una espira circular de hilo flexible y radio a por la que pasa una corriente I y está colocada en un campo magnético uniforme cuya densidad de flujo B es perpendicular al plano de la espira.

6.25 Demostrar que la fuerza neta sobre un elemento de corriente en un campo magnético uniforme depende únicamente de la posición de sus extremos y no de la forma del elemento.

6.26 Una bobina circular de radio r se encuentra situada en un campo magnético divergente. Las líneas de B forman un ángulo θ con el plano de la bobina como se indica en la Fig. P 6.26. Si la bobina tiene N vueltas y por ella circula una corriente I_0 en el sentido de las agujas del reloj vista desde arriba, calcular la magnitud y dirección de la fuerza que actúa sobre ella, llamando B_0 al valor de la inducción magnética en el plano de la espira.

Fig. P 6.26

6.27 Hallar en módulo y dirección el valor del campo magnético en los puntos a y b indicados en la Fig. P 6.27 (a está en el centro de la parte semicircular de radio r, y b está a igual distancia de los dos hilos).

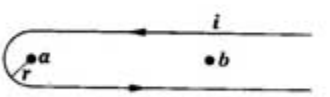


Fig. P 6.27

6.28 Sobre la superficie de una esfera de madera y cubriéndola completamente se ha devanado un gran número N de espiras, de un hilo muy fino, muy próximas entre sí y formando una sola capa. Si el valor de la corriente en el arrollamiento es i, calcular la densidad de flujo magnético en el centro de la esfera.

6.29 Por un par de hilos delgados e infinitamente largos, que se han doblado como se indica en la Fig. P 6.29, pasa la misma corriente i. ¿Cuál es la inducción magnética B en el centro de la parte circular?

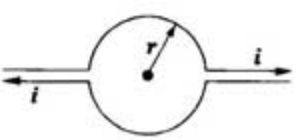


Fig. P 6.29

6.30 Unos electrones se mueven en un campo magnético uniforme. ¿Cuál debe ser el valor de dicho campo para que los electrones realicen una revolución completa en 10^{-8} seg?

6.31 Se construye una bobina plana de modo que contiene un gran número de espiras por unidad de longitud a lo largo del radio como se ve en la Fig. P 6.31.

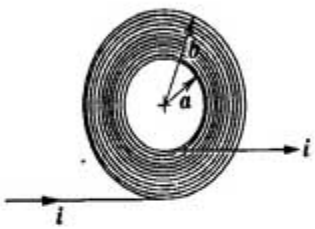


Fig. P 6.31

Si llamamos Z al número de espiras, demostrar que el valor de la inducción magnética en el centro de esta bobina, de radio interior a, radio exterior b y por la que circula una corriente i vale

$$B = \frac{\mu_0}{z} iZ \ln \frac{b}{a}$$

SIETE

Circuitos Eléctricos. Intensidad de la Corriente y Resistencia

7.1 Introducción

En este capítulo estudiamos los circuitos eléctricos y los factores que determinan la corriente que circula en ellos. Después de considerar el concepto de resistencia y la ley de Ohm, se estudia la disipación de energía que acompaña al paso de corriente por una resistencia y se discute la fuerza electromotriz como fuente de energía eléctrica. Después, desarrollamos las ecuaciones de los circuitos y estudiamos los métodos de medida de tensiones y corrientes. Finalmente, separándonos de la teoría eléctrica clásica, discutimos las causas de la resistividad en los metales, el mecanismo por el que se produce energía eléctrica en las pilas y los fenómenos del potencial de contacto y la fuerza electromotriz térmica.

7.2 Corriente eléctrica

En esta sección vamos a limitarnos a discutir las cuestiones más sencillas relativas a las corrientes y la conducción metálica. Dejamos para más adelante un examen más detallado del carácter conductor de los metales y la naturaleza del estado metálico.

Fundamentalmente, la corriente eléctrica no es más que un flujo de cargas. Si a través de una superficie están fluyendo cargas de modo estacionario, como ocurre en la sección transversal de un hilo, se define la intensidad de la corriente i por

$$i = \frac{dq}{dt} \quad \text{culombios/seg} \tag{7.1}$$

La unidad de intensidad de corriente tanto del sistema mks como del sistema práctico (véase Cap. 15) es el ampere, que corresponde, pues, a un culombio por segundo. Por convenio se toma como sentido de la corriente, la dirección de flujo de cargas positivas. En la mayoría de los casos se trata en realidad de un flujo de cargas negativas en sentido opuesto al de paso de la corriente.

Cuando la velocidad con que pasan las cargas por la superficie considerada varía de un punto a otro, resulta más conveniente introducir la densidad de corriente **j**, relacionada con la intensidad de la corriente por

$$i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{amperios} \tag{7.2}$$

siendo $d\mathbf{S}$ el elemento de superficie. La integral se extenderá a la superficie A a través de la cual deseamos calcular la intensidad de la corriente, y la unidad de densidad de corriente es el ampere por metro cuadrado. El empleo de la notación vectorial permite tener en cuenta los casos en que el área considerada no es perpendicular a la dirección de flujo de la corriente. En la Fig. 7.1 se indica el ángulo

Fig. 7.1 Relación entre intensidad y densidad de corriente, $i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$.

que forman $d\mathbf{S}$ y **j**. El valor de la integral es independiente de la forma de la superficie elegida, y, por tanto, conduce al mismo valor para la corriente a través del hilo, siempre que la superficie corte completamente la región por la que fluyen cargas. Cuando la densidad de corriente es uniforme la Ec. (7.2) da por integración

$$i = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \tag{7.3}$$

Si el área se toma perpendicular a la densidad de corriente, se puede escribir simplemente $i = jA$, siendo A el área de la sección transversal del conductor.

La corriente es debida al movimiento de portadores cargados con una velocidad de deriva media $\mathbf{v}$, llevando cada uno de ellos una carga e. Si el número de portadores es N por unidad de volumen será

$$\mathbf{j} = Ne\mathbf{v} \tag{7.4}$$

y si el área de la sección transversal recta del conductor es A,

$$i = NevA \tag{7.5}$$

Esto puede demostrarse haciendo uso de la Fig. 7.2. En efecto, determinemos la carga que atraviesa el área A por unidad de tiempo.

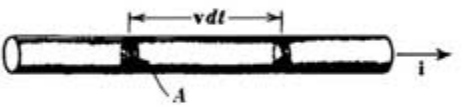


Fig. 7.2 Cálculo de la intensidad de la corriente en función de la velocidad de deriva.

En el tiempo dt atravesará la superficie que hemos elegido un cilindro de carga de longitud $\mathbf{v}\,dt$ y área A. Su volumen es $A\mathbf{v}\,dt$ y contiene $NA\mathbf{v}\,dt$ portadores cargados. Como cada portador lleva una carga e, el flujo total de carga en el tiempo dt será $dq = Nev A\,dt$. Calculando $dq/dt = i$ nos resulta la Ec. (7.5).

7.3 Resistencia. Ley de Ohm

La Ec. (7.5), según la cual la corriente es proporcional a la velocidad media de deriva, proporciona la clave para explicar la ley de Ohm, ley de proporcionalidad entre la intensidad de la corriente que fluye y la diferencia de potencial establecida en un conductor metálico. Aunque los electrones de conducción se mueven en un metal con velocidades muy grandes ($\sim 10^6$ m/seg), su movimiento en ausencia de un campo eléctrico aplicado exteriormente es completamente al azar y no hay flujo neto de cargas. Podemos imaginar que este movimiento anárquico es consecuencia de los choques elásticos, al azar también, entre los electrones y la red del metal (iones positivos). El tiempo medio entre dos choques se llama *tiempo libre medio* y la distancia media recorrida entre dos choques *recorrido libre medio*. Esta es la misma terminología empleada al estudiar el movimiento al azar de las moléculas de un gas. Debido a la naturaleza aleatoria del movimiento, no hay por término medio transporte neto de cargas. Sin embargo, si se aplica al metal un campo eléctrico, cada electrón sufre una desviación en su trayectoria aleatoria en la dirección de la fuerza producida por el campo. La Fig. 7.3 es una visión algo grosera del efecto que tiene el campo exterior, haciendo que las

trayectorias electrónicas se curven en la dirección de la fuerza para dar lugar a una velocidad de deriva neta. La curvatura es el resultado de la aceleración de las cargas entre dos choques. Podemos suponer que en cada choque con los iones de la red, el exceso de

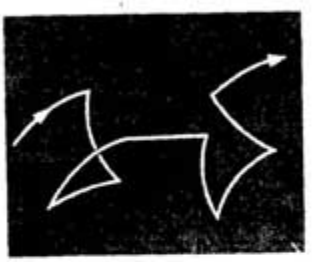


Fig. 7.3 Efecto del campo exterior sobre el movimiento al azar de los electrones.

energía, adquirido por el electrón del campo eléctrico, es transferido al ion. De este modo, es posible relacionar la velocidad media de deriva a la aceleración producida por el campo eléctrico aplicado exteriormente. En la Fig. 7.4 se indica cualitativamente la forma en

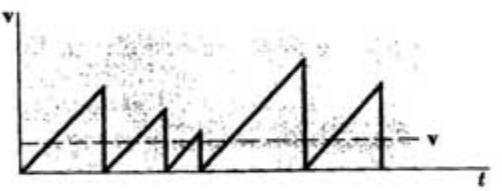


Fig. 7.4 Variación con el tiempo de la velocidad producida por el campo exterior. La velocidad adquirida se pierde en cada choque con la red.

que varía este exceso de velocidad debido al campo externo con el tiempo. Durante cada recorrido libre, el campo eléctrico produce una aceleración uniforme en la dirección de la fuerza, $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$. Cada choque reduce a cero la velocidad acumulada por efecto del campo exterior, después de lo cual, la aceleración provoca un nuevo aumento gradual de la velocidad hasta el choque siguiente con la red. La velocidad de deriva es la media temporal de este movimiento, superpuesto al movimiento al azar de los electrones.

Como la velocidad de deriva es siempre mucho menor que la velocidad al azar de los electrones, el tiempo medio entre choques es independiente del campo aplicado. Por tanto, el único factor que afecta a la velocidad de deriva es la aceleración debida a la fuerza $e\mathbf{E}$ que el campo eléctrico ejerce sobre los electrones. Como asimismo, la intensidad de la corriente es proporcional a la velocidad de deriva tenemos inmediatamente

$$i \propto E \tag{7.6}$$

que es el resultado que necesitábamos para interpretar la ley de Ohm. La corriente resulta proporcional a la fuerza ejercida sobre los electrones por el campo eléctrico como consecuencia de los choques entre los electrones y la red. La situación es semejante a la del movimiento viscoso, por ejemplo, la velocidad de caída de las gotas de lluvia en el aire bajo la acción de la gravedad. Las gotas de lluvia caen con una velocidad constante que depende de la fuerza de gravitación que actúa sobre ellas. Si en lugar de en el aire, las gotas cayeran en el vacío su velocidad aumentaría continuamente, como igualmente sucedería con los electrones en ausencia del efecto viscoso de los choques.

En el caso sencillo de un conductor de sección transversal constante y longitud L, la aplicación de una diferencia de potencial V entre sus extremos da lugar a un campo uniforme de valor, $E = V/L$. Para este caso podemos sustituir el valor del campo E, en la Ec. (7.6), para obtener

$$i \propto V$$

o sea

$$V = iR \tag{7.7}$$

en donde R, la resistencia, es el factor de proporcionalidad entre V e i. Esta es la forma usual de la ley de Ohm. Poniendo V en voltios e i en amperes, R viene medido en ohms, unidad de los sistemas mks y práctico (véase Cap. 15).

Aunque los campos eléctricos en los metales se anulan en el equilibrio, hay que tener en cuenta que el caso presente no es de equilibrio, sino un estado estacionario. Esto es, los portadores de carga (electrones en el caso de los metales) están moviéndose continuamente bajo la influencia del campo y la anulación del campo queda impedida por la diferencia de potencial mantenida entre los extremos del conductor.

Es posible también relacionar la resistencia R a las propiedades de los electrones de conducción en el metal. Empleando la misma configuración sencilla de un conductor de longitud L y sección transversal A, vamos a calcular el valor de R haciendo uso de los conceptos de recorrido libre medio, etc., introducidos anteriormente. Vamos a calcular v, la velocidad media de deriva, para sustituirla en la Ec. (7.5). Si llamamos 2τ al tiempo medio entre choques,

$$v = \frac{1}{2} eE \frac{2\tau}{m} \tag{7.7a}$$

como se deduce de $F = eE = ma$, siendo $v = a(2\tau)$ la velocidad acumulada al cabo de un tiempo 2τ. El factor $^1/_2$ es debido al hecho de que la velocidad media durante cada recorrido libre es $^1/_2$ de la velocidad máxima durante este intervalo. τ se conoce con el nombre de *tiempo de relajación*. Si remplazamos E por V/L, tenemos finalmente

$$i = \frac{Ne^2\tau A}{mL} V \tag{7.8}$$

Lo que conduce a

$$R = \frac{m}{Ne^2\tau}\frac{L}{A} = \rho\frac{L}{A} \tag{7.9}$$

La magnitud ρ definida por la Ec. (7.9) se llama *resistividad*. Equivale a la resistencia de un conductor de sección transversal unidad y longitud unidad. Así resulta

$$\rho = \frac{m}{Ne^2\tau} \quad \text{ohmios-m} \tag{7.10}$$

La *conductividad* σ es la inversa de la resistividad y, por tanto,

$$\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m} \quad (\text{ohmios-m})^{-1} \tag{7.11}$$

La resistividad depende únicamente del comportamiento y número de electrones de conducción y no de la forma del conductor.

Sustituyendo en la Ec. (7.10) los valores conocidos experimentalmente, se encuentra que para los metales a la temperatura ambiente τ es del orden de 10^{-10} segundos. A temperaturas muy bajas los metales en estado de gran pureza pueden tener valores de τ hasta de 10^{-7} segundos. Este efecto se discute con más detalle en la Sec. 7.10.

Partiendo de la Ec. (7.6), $i \propto E$, que establece que la intensidad de la corriente es proporcional al campo eléctrico existente en el conductor, podemos obtener otra forma de la ley de Ohm. En efecto, expresando la misma proporcionalidad en función de la densidad de corriente $j(= i/A)$, tenemos

$$\mathbf{j} \propto \mathbf{E}$$

La constante de proporcionalidad entre la densidad de corriente y el campo eléctrico es σ, la conductividad, de modo que podemos escribir

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \tag{7.12}$$

Esta ecuación es vectorial, puesto que tanto **j** como **E** son vectores. Podemos demostrar que esta ecuación es exactamente equivalente a nuestra primera expresión para la ley de Ohm [Ec. (7.7)] considerando un conductor de longitud L y sección transversal constante A, tal como se indica en la Fig. 7.5. Si la diferencia de potencial entre extremos de la sección es V, escribiremos

$$i = \frac{V}{R} = \frac{\sigma V A}{L}$$

en la que hemos sustituido R por $\frac{1}{\sigma}\frac{L}{A}$, según las Ecs. (7.9) y (7.11). Cuando en esta expresión despejamos la densidad de corriente **j** y sustituimos V/L por el campo **E**, obtenemos la forma dada en la Ec. (7.12).

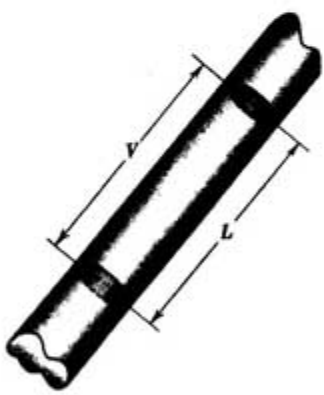


Fig. 7.5 Conductor de longitud L, sección transversal A y tensión aplicada V. La densidad de corriente vale $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ *y la intensidad de la corriente* $i = V/R$, *siendo* $R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{A}$

Si el material conductor es isótropo **E** y **j** tienen la misma dirección. La ventaja de esta forma de la ley de Ohm es que se trata de una relación *microscópica*. Esto es, nos da la relación entre la densidad de corriente y el campo en cada punto de un medio conductor. En contraste con esto, $V = iR$ da la intensidad de la corriente total a través de un cuerpo finito de resistencia R, al que se le aplica una diferencia de potencial V.

Cuando tenemos un cierto número de conductores de resistencias $R_1, R_2, R_3, \ldots$ conectados en serie, puede demostrarse que son equivalentes a un solo conductor de resistencia $R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots$. En efecto, para la conexión en serie, la corriente es la misma

a través de todas las resistencias de modo que, si la diferencia de potencial entre los extremos de cada una es

$$V_1 = iR_1$$
$$V_2 = iR_2$$
$$V_3 = iR_3$$
$$\cdots$$

sumando estas ecuaciones para obtener la diferencia de potencial entre extremos de la serie de resistencias,

$$V = i(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots) = iR$$

resulta que la resistencia equivalente es la suma de las resistencias individuales.

Para el caso de combinación en paralelo, la tensión V es la misma para todas las resistencias. Por tanto, $V = i_1R_1 = i_2R_2 = i_3R_3 \ldots$

$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots$$
$$= \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_3} + \cdots = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots\right) = V\frac{1}{R}$$

Es decir, la inversa de la resistencia equivalente es igual a la suma de las inversas de las resistencias.

Estos resultados pueden escribirse en la forma siguiente:
Resistencias en serie:

$$R = \sum_i R_i \tag{7.13}$$

Resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i} \tag{7.14}$$

Cuando la sección transversal del cuerpo conductor no es uniforme, la densidad de corriente varía de unos puntos a otros y el problema de calcular su resistencia se hace más complicado que en el caso de un conductor simple de sección constante, en el que se cumple $R = \rho L/A$ [Ec. (7.9)]. En todos los casos, salvo en los más sencillos, las dificultades matemáticas resultan bastante serias; no obstante, vamos a presentar un ejemplo sencillo para hacer ver el método de ataque. El problema es matemáticamente idéntico al del cálculo del flujo de calor a través de un cuerpo conductor térmico.

Consideremos el flujo radial de corriente por una placa circular de material conductor, desde una circunferencia de radio a, mantenida al potencial V_a, hasta el borde exterior a potencial V_b (Fig. 7.6).

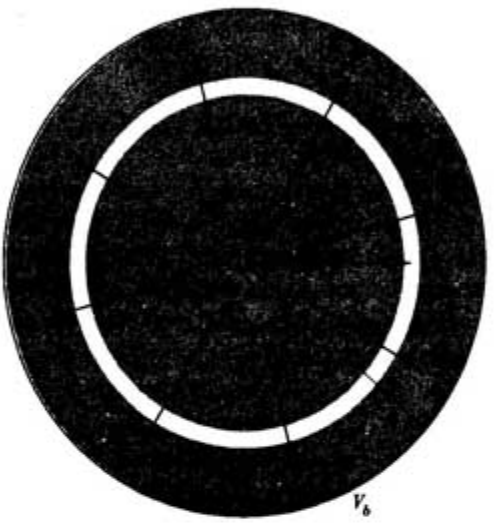


Fig. 7.6 Cálculo de la resistencia de un disco circular por el que pasa una corriente radialmente. La circunferencia de radio a se mantiene a V_a y la de radio b a V_b.

Sea σ la conductividad de la placa y t su espesor. Como la sección transversal de este conductor para el paso de la corriente es $2\pi rt$ a un radio r, y, por tanto, varía a medida que nos movemos de un extremo a otro del conductor, no podemos esperar que el gradiente de potencial, o sea el campo eléctrico, sea uniforme. Sin embargo, la corriente total a través de una sección transversal dada es la misma que a través de cualquier otra sección, de modo que podemos escribir para la intensidad de la corriente la expresión

$$i = jA = \sigma AE = -\sigma 2\pi rt \frac{dV}{dr} \tag{7.15}$$

siendo j la densidad de corriente a la distancia r del centro. Si en esta ecuación despejamos dV, la diferencia de potencial existente en un anillo de anchura dr, tenemos

$$dV = -\frac{i}{2\pi t\sigma}\frac{dr}{r}$$

La diferencia de potencial total entre extremos del conductor es

$$V_b - V_a = \int_a^b dV = -\frac{i}{2\pi t\sigma}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{i}{2\pi t\sigma}\ln\frac{r_a}{r_b}$$

Por tanto, la resistencia del conductor resulta

$$R = \frac{V_b - V_a}{i} = \frac{1}{2\pi l\sigma} \ln \frac{r_a}{r_b} \tag{7.16}$$

Hemos elegido un caso en el que resulta bastante fácil hallar el elemento de área perpendicular a la dirección de flujo de la corriente. Esto es necesario para obtener i a partir de jA como hicimos en la Ec. (7.15). Si la corriente no es perpendicular a la sección elegida, deberemos emplear $i = \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}$, lo que complica mucho el problema.

Como veremos en la Sec. 7.9, la resistividad de los metales varía con la temperatura y la pureza, y también es afectada por las imperfecciones en la estructura cristalina. En general, la resistividad de los metales aumenta con la temperatura, debido a la reducción en la longitud de los recorridos electrónicos entre dos choques con la red. En el caso de los semiconductores, que estudiaremos en la Sec. 11.3, la resistencia disminuye generalmente al aumentar la temperatura. Esto es consecuencia del aumento de la densidad de portadores de carga que tiene lugar en los semiconductores a temperaturas elevadas.

Algunos materiales y dispositivos no obedecen a la ley de Ohm. Por ejemplo, en un tubo de descarga gaseosa (véase Cap. 13), y en un diodo de vacío (Sec. 11.2) o de semiconductor (Sec. 11.3), la corriente *no* es proporcional a la tensión aplicada. En estos casos el modelo sencillo en el que un número constante de electrones de conducción, están sufriendo choques a medida que se mueven bajo la influencia del campo exterior, no es adecuado.

7.4 Disipación de energía en una resistencia

Cuando pasa la corriente por una resistencia la energía eléctrica se transforma en energía térmica. Si la diferencia de potencial entre los terminales de una resistencia R es V, el campo eléctrico realiza un trabajo $V\,dq$ para transportar una carga (positiva) dq desde el extremo de mayor potencial al de menor,

$$dW = V\,dq$$

La potencia, o velocidad con que se realiza el trabajo, es

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{V\,dq}{dt} = Vi \tag{7.17}$$

Según la Ec. (7.7), $V = iR$, por tanto,

$$P = i^2R \qquad \text{julios/seg} = \text{vatios} \tag{7.18}$$

o sea

$$P = \frac{V^2}{R} \tag{7.19}$$

Estas dos últimas expresiones son aplicables, naturalmente, solo en los casos en que es aplicable la ley de Ohm.

La energía disipada en la resistencia se convierte en calor. El proceso consiste, como vimos, en que los electrones son acelerados por el campo aplicado, pero están perdiendo continuamente la energía en exceso por sus choques con la red de iones. Esto calienta la red al aumentar la energía de las vibraciones térmicas. Los efectos caloríficos pueden convertirse a unidades térmicas recordando que una caloría es equivalente a 4,186 julios.

7.5 Fuerza electromotriz. Resistencia interna

Como la energía es disipada al pasar la corriente por una resistencia, como hemos visto en la última sección, cualquier circuito por el que pasa corriente y que contiene elementos disipativos tales como resistencias, exige una fuente de energía. Esta fuente de energía que provoca el paso de corriente por un circuito, *no puede* ser un campo electrostático. Esto se deduce del hecho de que el cambio de potencial electrostático en cualquier trayectoria cerrada es cero $\left(\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0\right)$. Por tanto, un campo electrostático no puede suministrar energía a cargas que se están moviendo recorriendo un circuito cerrado. El origen de la energía en un circuito puede ser químico, térmico, mecánico, o ser el resultado de un campo magnético variable como veremos en el Cap. 8. En muchos casos la fuente de energía está localizada, como en una *pila* o *batería*, pero también hay casos en los que la fuente de energía está distribuida por todo el circuito. Más adelante describiremos algunos tipos particulares de fuentes de energía; aquí vamos a dar un método general para caracterizar todas las fuentes de energía que hacen que circule corriente en un circuito cerrado.

Una fuente de energía está caracterizada por su *fuerza electromotriz* (fem) $\mathcal{E}$. Se define de acuerdo con la ecuación

$$P = \frac{dW}{dt} = \mathcal{E}i \tag{7.20}$$

La potencia P representa la rapidez con que la energía de una fuente no-electrostática es convertida en energía eléctrica. Esta rapidez depende de la fem y de la corriente i en el circuito. Poniendo $i = dq/dt$, la Ec. (7.20) puede escribirse en la forma

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \quad \text{julios/culombios, o voltios} \tag{7.21}$$

Por tanto, la fem es el trabajo por unidad de carga realizado por la fuente. La unidad de fem en los sistemas de unidades mks y práctico es el voltio. Debido a que la unidad de fem es la misma que la unidad de diferencia de potencial electrostático, pueden confundirse ambas magnitudes. La diferencia importante que existe entre ellas es que mientras que una diferencia de potencial electrostática puede suministrar trabajo a una carga que se mueve entre dos puntos, solo una fuente de fem puede suministrar la energía para que pase la corriente en un circuito *cerrado*.

En estado estacionario, la velocidad con que se suministra la energía a un circuito eléctrico es la misma que la velocidad con que se disipa la energía eléctrica en el circuito. Así, la Ec. (7.20) da no solo la velocidad de generación de energía eléctrica, sino también la velocidad con que se disipa esta energía en el circuito. Si las pérdidas en el circuito son resistivas y llamamos R a la resistencia total del circuito, se deduce que

$$\mathcal{E}i = i^2R \tag{7.22}$$

En esto, estamos suponiendo que se trata de un circuito simple con un solo camino para la corriente (Fig. 7.7). La resistencia R incluye todos los elementos disipativos del circuito completo.

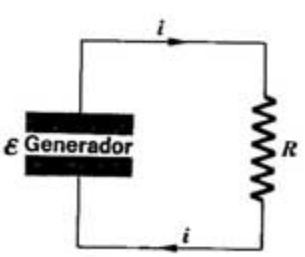


Fig. 7.7 Generador con fuerza electromotriz ε que produce corriente en un circuito cerrado.

En los casos en que la fem está localizada, por ejemplo, en una batería, las pérdidas en el circuito pueden dividirse en pérdidas *den-*

tro del generador de fem y pérdidas en el circuito exterior. La Fig. 7.8 indica la forma en que los elementos resistivos pueden dividirse en *resistencia interna*, R_i, y resistencia del circuito exterior, R. Al divi-

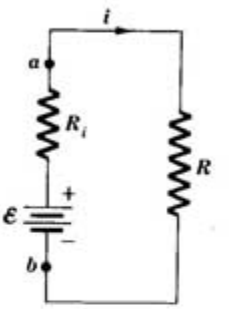


Fig. 7.8 Esquema que indica expresamente la resistencia interna de un generador. Este es una pila o batería. Los terminales de la batería son a y b.

dir la Ec. (7.22) por i y sustituir la resistencia total del circuito por $(R + R_i)$ nos resulta

$$\mathcal{E} = i(R + R_i) \qquad \text{o} \qquad \mathcal{E} - iR_i = iR \tag{7.23}$$

La diferencia de potencial entre los extremos del circuito exterior es $V = iR$. Esta es también la diferencia de potencial entre los terminales del generador. Podemos, pues, escribir

$$\mathcal{E} - iR_i = V \tag{7.24}$$

La Fig. 7.9 es una gráfica que da la variación de la diferencia de potencial entre los terminales de un generador en función de la

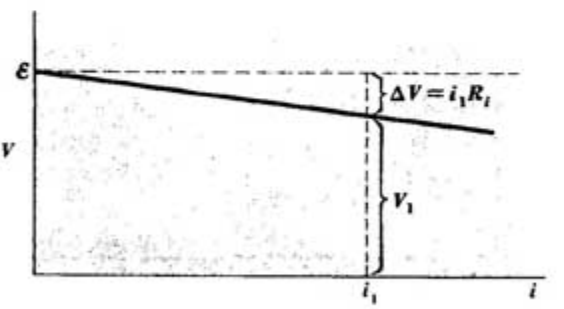


Fig. 7.9 Tensión de salida de un generador en función de la intensidad de la corriente. Para una intensidad i_1 hay una caída resistiva $\Delta V = i_1 R_i$ dentro del generador, restando una diferencia de potencial V_1 entre sus bornes.

intensidad de la corriente que lo atraviesa. La fem del generador es igual a la diferencia de potencial entre sus terminales cuando no pasa corriente. Cuando la resistencia interna de la fuente es despreciable comparada con la resistencia en el circuito exterior, podemos escribir la ecuación aproximada

$$\mathcal{E} = V \tag{7.25}$$

En el caso de fuentes de energía localizadas resulta útil considerar el circuito desde otro punto de vista, sugerido por el esquema de la Fig. 7.10. Puede imaginarse que la fuente no-electrostática de energía produce una separación de cargas positivas y negativas en su interior. Esta separación de cargas da lugar a un campo elec-

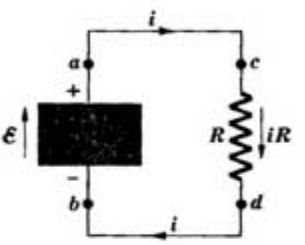


Fig. 7.10 En este circuito, el generador produce una diferencia de potencial $V = \varepsilon - iR_i$ entre los terminales a y b. Sobre la carga, puntos c y d, aparece la misma diferencia de potencial, por lo que circula una corriente $i = V/R$.

trostático dentro de la fuente, y la fuente de energía debe realizar trabajo para mover las cargas en contra de este campo. Como consecuencia se mantiene una diferencia de potencial $\mathcal{E} - iR_i = V$ entre los terminales del generador a y b. Cuando se conectan los terminales del generador a la carga mediante hilos de resistencia muy baja, se mantiene entre los terminales de la carga c y d esta misma diferencia de potencial. Desde este punto de vista, la fuente de fem produce el campo electrostático que hace pasar corriente por la carga.

7.6 Circuitos, leyes de Kirchhoff

Vamos ahora a examinar algunas propiedades generales de los circuitos eléctricos. La Fig. 7.10 es un ejemplo de un circuito típico que contiene un generador y una resistencia. El problema usual es calcular la intensidad de la corriente en el circuito y la tensión entre los extremos de cada uno de sus elementos. Ya hemos deducido anteriormente la Ec. (7.23) que da la solución cuando conocemos los valores de la fem y las resistencias de los elementos del circuito. Esta ecuación se cumple en cualquier circuito *cerrado*. En el caso general en que exista más de un generador y más de una resistencia en el circuito, puede volverse a escribir en la siguiente forma:

$$\Sigma\mathcal{E} - \Sigma iR = 0 \tag{7.26}$$

El primer término, representa la fem total de los generadores, y el segundo, la suma de las caídas de tensión en las resistencias del circuito, incluidas las resistencias internas de los generadores. La fem es positiva en la dirección en que sería desplazada una carga

positiva, y la caída de tensión iR es positiva en el sentido de la corriente.

Frecuentemente esta ecuación se escribe de modo que se incluya el efecto de la resistencia interna en el primer miembro; para ello, se escribe $V = \mathcal{E} - iR_i$ para la diferencia de potencial entre terminales de la fuente cuando pasa corriente, y, entonces, tenemos

$$\Sigma V = \Sigma iR \tag{7.27}$$

en la que R se refiere ahora solo a las resistencias exteriores existentes en el circuito. Esta ecuación es esencialmente idéntica a la (7.26).

De la idea de conservación de la carga, esto es, que las cargas ni se crean ni se destruyen, se llega a otra regla importante. En efecto, si no hay acumulación de carga en ningún punto del circuito, la velocidad con que llegan las cargas a un punto debe ser la misma que la velocidad con que salen de él. La intensidad de la corriente que llega a un punto debe ser la misma que lo abandona, esto es, en cualquier punto de un circuito

$$\Sigma i = 0 \tag{7.28}$$

En esta terminología a las corrientes que llegan a un punto se les da un signo y a las que lo abandonan el signo opuesto. Cuando se aplica a un circuito simple que no tiene ramificaciones, tal como el de la Fig. 7.10, esta regla nos dice que la corriente tiene la misma intensidad en todos los puntos del circuito, lo que hemos supuesto tácitamente al escribir la Ec. (7.23).

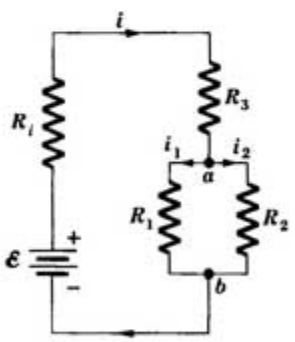


Fig. 7.11 Circuito con una ramificación.

Vamos a aplicar esta segunda regla en un circuito más complicado, tal como el de la Fig. 7.11, a los nudos a y b. La regla nos dice que la intensidad i que llega al nudo es igual a la suma de las intensidades i_1 e i_2 de las corrientes que pasan por las resistencias en paralelo R_1 y R_2.

En circuitos como el de la Fig. 7.11, podemos calcular tensiones e intensidades aplicando las Ecs. (7.27) y (7.28), y empleando las reglas para las combinaciones de resistencias en serie y en paralelo que ya hemos desarrollado. Muchos circuitos complicados pueden desdoblarse en combinaciones sencillas de resistencias en serie y paralelo, permitiendo así una solución simple.

Vamos a ver ahora la solución completa del circuito de la Fig. 7.11, suponiendo conocidas $\mathcal{E}$ y todas las resistencias. En primer lugar podemos escribir

$$\mathcal{E} = iR_i + iR_3 + V_R$$

siendo V_R la tensión a través de R_1 o R_2, cuyo valor será

$$V_R = i_1R_1 = i_2R_2$$

además

$$i_1 + i_2 = i$$

Finalmente, la resistencia equivalente de R_1 y R_2 en paralelo vendrá dada por

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{o} \qquad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

Y la ecuación del circuito se convierte en

$$\mathcal{E} = iR_i + iR_3 + i\frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$$

en la que podemos despejar i. Los valores de i_1 e i_2 se obtienen inmediatamente una vez que se conoce i.

En algunos circuitos las resistencias no pueden agruparse de esta forma sencilla. Uno de estos circuitos es el de la Fig. 7.12. Vamos a usar este circuito como ejemplo para describir un método de obtener la intensidad de la corriente en cada rama, cuando se conocen $\mathcal{E}$ y todas las resistencias. Llamaremos i_1 a la corriente a través de R_1, y así sucesivamente. Las reglas para resolver estos problemas se llaman *leyes de Kirchhoff*, que en realidad no son más que las ecuaciones que ya hemos desarrollado

$$\Sigma\mathcal{E} - \Sigma iR = 0 \qquad \text{y} \qquad \Sigma i = 0 \qquad (7.26, 7.28)$$

La primera ecuación es aplicable a cualquier malla cerrada y la segunda a los nudos. La aplicación de estas reglas se simplifica notablemente si se adopta un procedimiento sistemático. Empecemos por hacer una hipótesis sobre el sentido que llamaremos positivo

para la circulación de la corriente en cada rama. No es necesario que nuestra elección sea la correcta, puesto que si una intensidad nos sale negativa esto significa simplemente que la corriente fluye en sentido opuesto. Las corrientes cuyo sentido se asigne correctamente resultarán positivas.

A continuación vamos a aplicar la ecuación de las mallas. (No es necesario considerar *todas* las mallas posibles. Solo necesitamos en total tantas ecuaciones como incógnitas; esto es, como corrientes desecemos determinar.) Para cada malla hemos de decidir un sentido para recorrerla, lo que se ha indicado en la Fig. 7.12 mediante las flechas curvadas A, B y C. Debe ponerse cuidado al tomar los signos de las fuerzas electromotrices y las caídas de tensión iR en las mallas. Al igual que en el circuito simple de la Fig. 7.10, $\mathcal{E}$ se toma como positiva si al atravesar el generador pasamo del terminal negativo al positivo. (Tal como hemos elegido el sentido de circulación en la malla C, $\mathcal{E}$ es negativa.) Las caídas de tensión iR se toman como positivas en la Ec. (7.27) si el sentido de circulación coincide con el asignado a la corriente, y como cantidades negativas si es opuesto a la corriente. Para ilustrar estas ideas, damos a continuación una lista de las ecuaciones para las tres mallas:

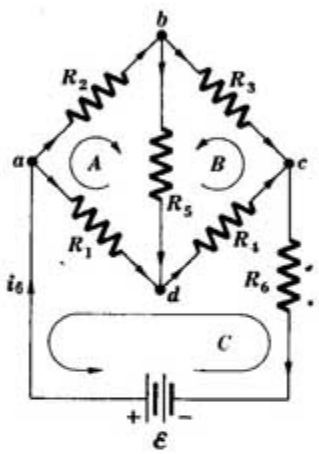


Fig. 7.12 Empleo de las leyes de Kirchhoff para el cálculo de corrientes.

Malla	*Ecuación*
A	$-i_1R_1 + i_2R_2 + i_5R_5 = 0$
B	$i_4R_4 - i_3R_3 + i_5R_5 = 0$
C	$-\mathcal{E} + i_6R_6 + i_4R_4 + i_1R_1 = 0$

Finalmente, escribimos las ecuaciones de nudo de acuerdo con la Ec. (7.28):

Nudo	*Ecuación*
a	$i_6 = i_1 + i_2$
b	$i_2 = i_3 + i_5$
c	$i_6 = i_3 + i_4$
d	$i_4 = i_1 + i_5$

Una vez se han escrito estas ecuaciones, el problema que resta es puramente algebraico. Conviene remplazar los símbolos de las resistencias por sus valores para simplificar el cálculo.

El procedimiento que hemos dado aquí no es sino uno de varios métodos equivalentes que existen. Todos ellos están basados en la aplicación de los mismos principios, el de conservación de la energía y el de conservación de la carga.

7.7 Medidas de tensiones e intensidades de corriente. El galvanómetro

Hemos considerado con alguna extensión las corrientes eléctricas sin dar ningún detalle de cómo pueden medirse en el laboratorio. Vamos a subsanar esta deficiencia, e iniciar el estudio del galvanómetro, el aparato más empleado para medir corrientes e, indirectamente, diferencias de potencial.

Como mencionamos brevemente en el Cap. 6, sobre una espira por la que circula una corriente y está colocada en un campo magnético, como se indica en la Fig. 7.13, se ejerce un par de fuerzas.

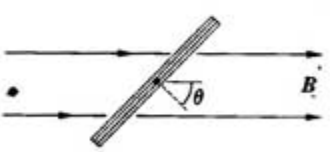


Fig. 7.13 Bobina de galvanómetro en un campo magnético.

En un galvanómetro, se coloca, en el campo magnético de un imán permanente, una espira por la que se hace pasar la corriente que se desea medir. Un resorte tiende a mantener el plano de la espira paralelo al campo magnético y la corriente que pasa hace que la espira gire tendiendo a quedar perpendicular al campo en contra del par ejercido por el resorte. El giro de la espira arrastra una aguja, o bien, en los instrumentos más sensibles, mueve un espejo de modo que un rayo luminoso se desplaza sobre una escala.

La sensibilidad del galvanómetro puede determinarse aplicando la ecuación obtenida anteriormente

$$\tau = NiAB \operatorname{sen} \theta \tag{6.21}$$

que nos da el par sobre una bobina de N espiras, área A, por la que pasa una corriente de intensidad i y está colocada en un campo de inducción magnética B. El ángulo θ es el formado por la normal al plano de la bobina y la dirección del campo. La desviación angular θ para una corriente dada dependerá del par recuperador a que da lugar la suspensión elástica de la bobina. Podemos caracterizar este par por la constante elástica k, y escribir

$$\tau = k\theta \tag{7.29}$$

Cuando el plano de la bobina sea paralelo al campo, $\theta = 90°$, y sen $\theta \simeq 1$; entonces podemos igualar (6.21) y (7.29) para obtener

$$i = \frac{k}{NAB}\theta = K'\theta \tag{7.30}$$

en la que K' se conoce con el nombre de constante del galvanómetro. Por tanto, el ángulo de desviación del galvanómetro es proporcional a la corriente que lo atraviesa. En la práctica, se extiende la validez de esta ecuación a ángulos grandes disponiendo el campo magnético de modo que las líneas de B permanezcan aproximadamente paralelas a la bobina aunque ésta gire, tal como se indica en el esquema de la Fig. 7.14. Para ello se sitúa en el centro de la

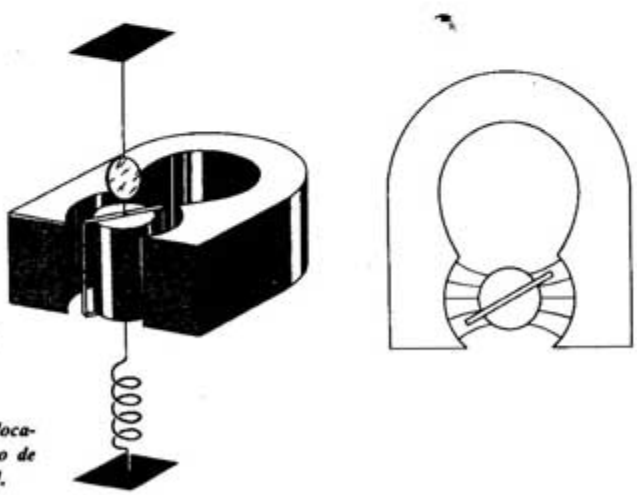


Fig. 7.14 Bobina de galvanómetro colocada entre los polos del imán. El núcleo de hierro dulce produce un campo radial.

bobina un cilindro de hierro dulce, lo que, junto con la forma especial de los polos del imán permanente, hace que las líneas del campo magnético sean radiales.

La práctica usual en los galvanómetros de calidad es especificar su sensibilidad indicando la corriente necesaria para producir una desviación del rayo luminoso, reflejado por el espejo del galvanómetro, de 1 mm sobre una escala situada a 1 m de distancia. Como el rayo luminoso se desvía un ángulo 2θ, tendremos: $d/L = \text{tg } 2\theta \simeq 2\theta$, siendo L la distancia del galvanómetro a la escala. Sustituyendo en la Ec. (7.30) se obtiene

$$i = K' \frac{d}{2L} = \frac{K'}{2.000} d = Kd \tag{7.31}$$

donde se expresa d en milímetros. K se denomina *índice de mérito* del galvanómetro. Con los modelos más sensibles pueden medirse corrientes hasta de 10^{-11} amp.

Cuando el galvanómetro se emplea como instrumento para la medida de intensidades, resulta deseable que su resistencia sea muy pequeña comparada con la de los otros elementos del circuito al que está conectado. Esto resulta necesario para evitar perturbaciones del circuito. En la Fig. 7.15 se indica un ejemplo sencillo.

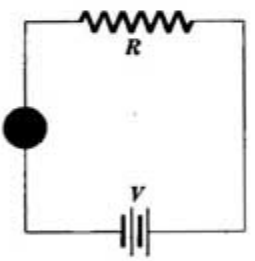


Fig. 7.15 Galvanómetro empleado para medir una corriente.

Supongamos que se desea determinar el valor de la resistencia R midiendo la corriente que pasa por ella cuando está conectada a una fuente de tensión conocida, V. Sería conveniente que la resistencia del galvanómetro fuera mucho menor que R con objeto de que toda la tensión, salvo una fracción despreciable, aparezca a través de R. Los galvanómetros que han de usarse como amperímetros se construyen con unas pocas vueltas de hilo grueso para que la resistencia resulte tan pequeña como sea posible.

La sensibilidad máxima de un amperímetro está determinada por la del galvanómetro de que está formado. Por el contrario, frecuentemente se necesita reducir la sensibilidad a un valor menor. Esto se consigue disponiendo una resistencia en paralelo o *shunt*, como se indica en la Fig. 7.16. En ella, la resistencia de la bobina del galvanómetro está representada por R_g, y la resistencia del shunt es R_p. Aplicando la ley de Ohm a este circuito podemos hallar el va-

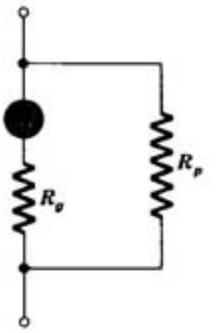


Fig. 7.16 Resistencia shunt R_p utilizada para ajustar la sensibilidad del galvanómetro en su empleo como amperímetro.

lor de R_p necesario para reducir la sensibilidad al valor deseado. Este dispositivo reduce igualmente la resistencia total del amperímetro.

Cuando un galvanómetro ha de ser usado como voltímetro, como en la Fig. 7.17, es necesario que su resistencia interna sea mucho

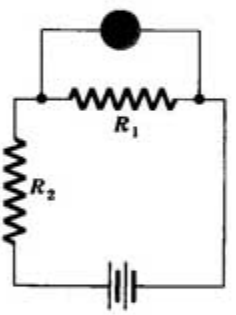


Fig. 7.17 Galvanómetro empleado como voltímetro, para medir la tensión entre los extremos de R_1.

mayor que el de la resistencia entre cuyos extremos ha de conectarse. En caso contrario, el voltímetro alteraría la corriente que pasa por el circuito, lo cual resulta evidentemente indeseable. Los galvanómetros que deben emplearse como voltímetros se construyen con muchas vueltas de hilo fino para obtener gran sensibilidad y gran resistencia. Usualmente hay sensibilidad en exceso, y se aumenta la resistencia del voltímetro, al mismo tiempo que se reduce la sensibilidad al valor deseado, mediante una resistencia R_s apropiada que se añade en serie, como se indica en la Fig. 7.18.

Fig. 7.18 Resistencia serie R_s utilizada para ajustar la sensibilidad del galvanómetro en su empleo como voltímetro.

Es inmediato también calcular el valor adecuado de la resistencia R_s para obtener una sensibilidad dada.

7.8 El potenciómetro

El circuito más empleado para medir tensiones con precisión es el potenciómetro. Se trata de un dispositivo de comparación de tensiones que utiliza un galvanómetro como indicador de cero. En la Fig. 7.19 se indica una forma simple de este circuito. Consiste en una

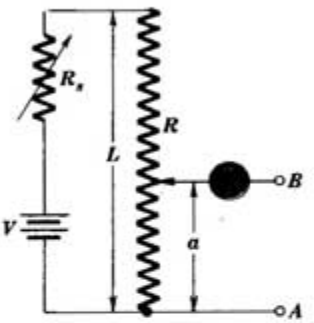


Fig. 7.19 Potenciómetro

fuente de tensión V, conectada mediante una resistencia ajustable R_s a un hilo resistivo R. La tensión entre los terminales AB puede variarse desplazando un contacto móvil sobre el hilo R. Una característica especial de esta resistencia, es que está construida mediante un hilo uniforme de modo que la tensión entre A y B es una fracción de la tensión total aplicada a R dada por la relación entre las longitudes a y L. Esto es,

$$\frac{V_{AB}}{V_R} = \frac{a}{L}$$

Esto se deduce inmediatamente de la ley de Ohm, suponiendo que el hilo es de resistividad y sección transversal uniformes.

Para su empleo, el potenciómetro se ajusta inicialmente, calibrándolo mediante la medida de la tensión de un generador conocido, como, por ejemplo, una pila patrón. Esto se realiza colocando el terminal B en una posición conveniente (por ejemplo, para que la distancia a quede calibrada en voltios, en cuyo caso B se colocaría en una posición que corresponda a la tensión de la fuente conocida), y se varía la resistencia de ajuste R_s hasta que el galvanómetro marque cero. Con esto de hecho se establece una corriente patrón en el potenciómetro. Para medir una tensión desconocida basta entonces conectarla entre A y B y ajustar la distancia a hasta que el galvanómetro marque cero de nuevo. En todo caso, una simple aplicación de la ley de Ohm daría el potencial desconocido. Cuando el potenciómetro está equilibrado, no toma corriente de la fuente que se está midiendo. En la práctica, el galvanómetro está protegido mediante una resistencia shunt para disminuir su sensibilidad hasta que el equilibrio es casi perfecto. Esto evita que una corriente excesiva

pueda dañar el galvanómetro. De modo análogo, la pila patrón normalmente incorporada al potenciómetro está también protegida, para evitar una corriente excesiva que la estropearía, mediante una gran resistencia serie que se cortocircuita cuando se ha alcanzado un equilibrio casi perfecto. En la mayoría de los potenciómetros en lugar de un hilo único se dispone de una serie de resistencias fijas y de un hilo con contacto deslizable que permiten un ajuste igualmente preciso para determinar la relación a/L efectiva. El término *potenciómetro* se usa generalmente para designar el aparato completo que incluye, batería, pila patrón y las resistencias ajustables necesarias para medir tensiones desconocidas. No obstante, cualquier contacto deslizable sobre una resistencia que permita obtener una tensión variable se llama también potenciómetro. En la Fig. 7.20 se indica la

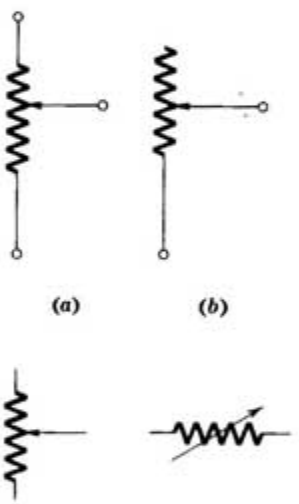


Fig. 7.20 Resistencia variable conectada, (a) como potenciómetro (tres terminales), y (b) como reóstato (dos terminales). Símbolos empleados en los diagramas.

diferencia entre una resistencia variable, o *reostato*, y un potenciómetro tal como se usan en circuitos electrónicos. El mismo elemento puede emplearse como potenciómetro o bien como reostato. La única diferencia que existe es que en un potenciómetro la corriente pasa por toda la resistencia y por medio del contacto móvil se toma de ella una tensión variable, convirtiéndolo así en un dispositivo de tres terminales, mientras que el reostato es un dispositivo de dos terminales en el que la corriente pasa solo por una porción variable del elemento resistivo.

7.9 Puente de Wheatstone

Otro circuito, empleado para medir resistencias, es el puente de Wheatstone (inventado en 1833, probablemente por un hombre lla-

mado Christie), cuyo esquema es el de la Fig. 7.21. Es también un aparato de cero en el que se emplea un galvanómetro para indicar el «equilibrio». R_1 es en este caso la resistencia desconocida y

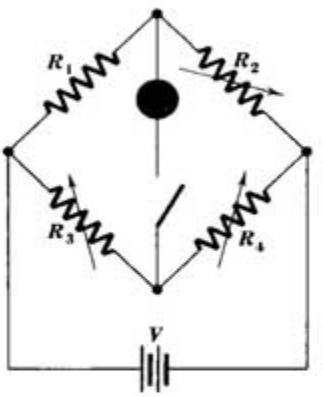


Fig. 7.21 Puente de Wheatstone para medir por un método de cero una resistencia desconocida R_1 en función de otras tres conocidas (R_2, R_3 y R_4).

R_2, R_3 y R_4 son resistencias conocidas, de las cuales son ajustables una o más. Si la relación entre las resistencias es

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4} \tag{7.32}$$

no pasa corriente por el galvanómetro cuando se cierra el interruptor, con lo que es posible determinar la resistencia desconocida. Este es un ejemplo de los muchos tipos de circuitos en *puente* que existen y que permiten realizar medidas de cero con gran precisión. Este método no exige el conocimiento o la constancia rigurosa de la fuente de tensión V.

7.10 Variaciones de la resistividad de los metales

Vamos ahora a puntualizar algunas cuestiones como las variaciones que presenta la resistividad de varios tipos de metales en diferentes condiciones. En la Tabla 7.1 se dan las resistividades de algunos metales a 20° C.

Tabla 7.1

Metal	*Resistividad ρ, ohm-m*
Cu	$1{,}7 \times 10^{-8}$
Al	$2{,}8 \times 10^{-8}$
Ag	$1{,}6 \times 10^{-8}$
Au	$2{,}4 \times 10^{-8}$
Bronce	$\sim 7 \times 10^{-8}$

En la Sec. 7.3 desarrollamos la teoría elemental de la conductividad. Una descripción detallada del comportamiento de los electrones de conducción en los metales exige consideraciones de mecánica cuántica que no podemos hacer aquí. No obstante, podemos aún utilizar la expresión clásica desarrollada anteriormente

$$\rho = \frac{m}{Ne^2\tau} \tag{7.10}$$

si las magnitudes N, τ, e incluso m probablemente, se calculan por métodos de mecánica cuántica. Por tanto, vamos a utilizar la Ec. (7.10) para analizar cualitativamente como varía la resistividad en distintas condiciones.

Para un metal dado, la causa principal de variación de la resistividad al cambiar las condiciones es la variación de τ, que es una medida del tiempo medio entre choques de los electrones con los iones de la red que constituye el metal. Así, pues, cualquier cosa que afecte la probabilidad de estas colisiones influye sobre la resistividad. Debido a la naturaleza cuántica del comportamiento de los electrones de conducción en los metales, es necesario recurrir a algunas ideas de mecánica ondulatoria para describir los efectos más importantes. Uno de los resultados más importantes de la mecánica ondulatoria es que los electrones de conducción podrían moverse por una red perfectamente periódica, formada por iones idénticos espaciados uniformemente, sin sufrir choques. Este hecho contrasta notablemente, con el movimiento con choques al azar que es de esperar en un modelo clásico, y es consecuencia del carácter ondulatorio de los electrones. Sin embargo, ningún metal real tiene esa red ideal perfecta y hay siempre choques que limitan considerablemente el recorrido o el tiempo libre medios entre choques. Por ejemplo, la pureza de un metal no es factor de importancia para determinar la resistividad a la temperatura ambiente; hay una diferencia relativamente pequeña entre ρ para el cobre puro y para el bronce, aleación que por estar constituida por una mezcla al azar de átomos de cobre y cinc, dista mucho de ser una red perfectamente periódica. La razón de esta influencia tan pequeña reside en el hecho de que a la temperatura ambiente, aun en el cobre muy puro, las vibraciones térmicas impiden que la red sea verdaderamente periódica, de modo que τ está ya seriamente limitado por los desplazamientos de los iones de origen térmico y el efecto adicional debido a la presencia de una mezcla al azar de iones desiguales no resulta tan importante. De modo similar, las tensiones mecánicas u otras imperfecciones de la red solo introducen pequeñas variaciones en la resistividad a la temperatura ambiente.

Sin embargo, cuando el metal está a temperaturas extremadamente bajas resultan aparentes todas las consecuencias del modelo cuántico. A 4° K, aproximadamente la temperatura de ebullición del helio a la presión atmosférica, los efectos de las vibraciones térmicas en el cobre llegan a ser despreciables comparados con otras causas de choques con la red. Esto se demuestra por los datos de la Tabla 7.2 que da algunos valores típicos de la relación entre la resistencia a la temperatura ambiente (300° K) y la correspondiente a 4° K para distintas muestras de cobre.

Tabla 7.2

Muestra	*Relación de resistividades*
Cobre muy puro sin tensiones	**2.000-7.000**
Cobre ordinario sin tensiones	**50-100**
Bronce (cobre + cinc)	**4**

El gran valor de esta relación en el metal más puro quiere decir que a la temperatura ambiente la mayor parte de los choques que limitan τ son debidos al desplazamiento térmico de los iones que a temperatura muy baja estarían dispuestos periódicamente. En el cobre menos puro, el menor valor de la relación significa que incluso a la temperatura ambiente muchos de los choques son debidos a impurezas y a imperfecciones de la estructura cristalina. Estos efectos, naturalmente, persisten a bajas temperaturas y hacen que la relación de resistividades tenga un valor relativamente bajo. En el caso del bronce, los efectos del tipo impureza, consecuencia de la existencia de dos clases de iones, son dominantes y la relación de resistividades es aún más pequeña.

Las medidas del efecto Hall demuestran que la densidad de portadores de carga en los metales es esencialmente independiente de la temperatura; esto hace que las variaciones observadas de la resistividad con la temperatura resulten muy difíciles de explicar desde un punto de vista puramente clásico.

Como hemos visto que la resistividad depende de factores de tipo cuántico, algunos de los cuales no son fáciles de determinar, no insistiremos más sobre esta cuestión. Para terminar, vamos a explicar la forma usual de describir la variación de la resistencia con la temperatura en las proximidades de la ambiente. Dentro de un intervalo razonable (de 0° a unos 200° C) se encuentra que la resistividad de muchos metales varía linealmente con la temperatura. En

esta región de linearidad la resistividad a una temperatura T puede escribirse en la forma

$$\rho_T = \rho_{20°C}(1 + \alpha\,\Delta T) \tag{7.33}$$

donde ΔT es la diferencia entre la temperatura T y 20° C. La constante α es la variación relativa de resistividad por grado. Para la mayoría de los metales α está comprendida entre 3,5 y 4 partes por 1.000 por grado centígrado. En ciertas aleaciones obtenidas empíricamente α es muy pequeña, del orden de 1 parte en 10^5 por grado en un intervalo de temperaturas apreciables. Estas aleaciones son particularmente útiles para construir resistencias de precisión cuya variación con la temperatura resulta indeseable.

7.11 Fuerza electromotriz de una pila

La pila eléctrica, o batería, fue una de las primeras fuentes de energía eléctrica prácticas y aún presenta gran importancia. Las hay de muchos tipos distintos, pero todas ellas obedecen a los mismos principios. Como este problema suele estudiarse también en los cursos de química, lo trataremos aquí brevemente.

Con el fin de llegar a comprender cómo se produce una fem como consecuencia de las fuerzas químicas, examinemos los hechos experimentales. Si se coloca un trozo de metal, por ejemplo, cobre, en una disolución diluida de un ácido, los iones Cu^{++} presentan una cierta tendencia a abandonar la superficie del metal y pasar a la disolución. Esta tendencia se llama *presión de disolución* y es el resultado de que la atracción que las moléculas de agua ejercen sobre los iones metálicos es superior a la atracción de la superficie metálica por el ion. Cada ion que pasa a la disolución deja en el metal una carga equivalente, de modo que el potencial del metal respecto a la disolución se hace cada vez más negativo. El metal continúa disolviéndose hasta que se alcanza un estado de equilibrio. Este tiene lugar cuando el número de iones que escapan del metal por unidad de tiempo es igual al número de los que vuelven a la superficie desde la disolución también por unidad de tiempo. Como la frecuencia con que los iones vuelven a la superficie del metal depende del número de iones que chocan por segundo con esta superficie, el equilibrio dependerá de la concentración de iones en la disolución (así como de la temperatura que afecta a su velocidad). Este estado de equilibrio también está influido por la diferencia de potencial que se aparece como consecuencia de los electrones que dejan los iones que han escapado. Para una concentración dada de iones del metal en la solución, los diferentes metales alcanzan en el

equilibrio potenciales negativos característicos. Si en una misma disolución colocamos dos electrodos, por ejemplo, de Cu y Zn, el Zn se hace más negativo que el Cu (debido a su mayor presión de disolución). En estas condiciones no hay flujo neto de iones Cu^{++} hacia el Cu, sin embargo, el electrodo de Zn más negativo atrae iones Cu^{++} que se depositan como átomos de Cu y neutralizan parte de la carga negativa neta existente en el electrodo de Zn. El potencial de equilibrio del electrodo de Zn se mantiene si, por término medio, por cada ion Cu^{++} capturado escapa un ion Zn^{++}. Por tanto, hay depósito de Cu sobre el Zn y los iones Zn^{++} pasan a la disolución. En el estado de equilibrio habrá en la disolución una gran concentración de iones Zn^{++} y una muy baja de iones Cu^{++}.

Supongamos ahora que los dos electrodos se conectan exteriormente, por ejemplo, con un voltímetro. Desde el Zn más negativo fluyen electrones al electrodo de Cu. Esto hace disminuir el potencial negativo del electrodo de Zn, haciendo que pasen a la disolución más iones Zn^{++}. El electrodo de Cu tiende a hacerse más negativo y, por tanto, se depositan en él más iones Cu^{++} de la disolución. En tanto que este proceso puede continuar, se mantiene la diferencia de potencial entre los electrodos como consecuencia de estas acciones químicas y tenemos una pila eléctrica.

Un factor que influye sobre la medida de la fem de una batería es la *diferencia de potencial de contacto* entre los dos metales. Cuando se ponen en contacto dos metales distintos aparece entre ellos una diferencia de potencial debido al paso de electrones de uno de los metales al otro. Este efecto será discutido en la Sec. 7.12. El

Tabla 7.3 Serie de tensiones para algunos elementos

(Relativa al electrodo de hidrógeno)

Elemento	*Ion*	*Potencial a 25° C, volts*
Li	Li^{+}	−2,959
Na	Na^{+}	−2,715
Zn	Zn^{++}	−0,762
Fe	Fe^{++}	−0,44
Cd	Cd^{++}	−0,402
Sn	Sn^{3+}	−0,336
Pb	Pb^{++}	−0,12
Pt, H_2	H^{+}	0,000
Cu	Cu^{++}	+0,345
Hg	Hg^{++}	+0,799
Ag	Ag^{+}	+0,798

potencial de contacto afecta a la tensión neta medida entre los electrodos. Midiendo la diferencia de potencial entre distintos pares de electrodos, se ha construido la llamada serie de tensiones, parte de la cual se recoge en la Tabla 7.3, en la que los potenciales están dados respecto al electrodo de hidrógeno (un electrodo de Pt sobre el que está burbujeando H_2 gaseoso). En estas medidas se emplea una concentración patrón de un mol por litro. La fuerza electromotriz entre dos electrodos cualesquiera es la diferencia algebraica entre las fem dadas en la tabla.

Hemos definido la fem de una batería, como la diferencia de potencial entre sus terminales cuando no se permite que pase corriente. En general, habrá una disminución de esta diferencia de potencial cuando pasa la corriente, pues los iones que transportan la corriente deben adquirir una velocidad extra y la energía necesaria proviene en última instancia de las fuerzas químicas. Esta energía consumida aparece como calentamiento de la pila cuando pasa la corriente y es el origen de la resistencia interna de la pila.

Con fines prácticos podemos clasificar las baterías en aquellas que se van agotando al hacer uso de la energía química disponible y aquellas otras en las que haciendo pasar por ellas una corriente de sentido opuesto se produce una reacción química inversa que regenera la batería a su estado original. En los libros de química general se describen ejemplos de ambos tipos. En las medidas eléctricas de precisión son de particular importancia las pilas patrón que se construyen de modo que den una tensión conocida con gran precisión en tanto que no se les haga suministrar corriente. Estas pilas deben emplearse en circuitos como el potenciómetro que permiten realizar medidas de tensión sin tomar una corriente apreciable.

7.12 Potencial de contacto y fuerzas electromotrices térmicas

En la sección anterior mencionamos la diferencia de potencial entre dos metales en contacto. Para aclarar este efecto, y algunos fenómenos que le están relacionados, debemos considerar el comportamiento de los electrones de conducción desde un punto de vista mecano-cuántico. Uno de los efectos cuánticos más importantes se presenta en la distribución de energías o velocidades de los electrones de conducción. Según la estadística clásica, cada electrón de conducción debe tener una energía cinética media de $^3/_2(kT)$, siendo k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta, y no existe ningún impedimento para que varios electrones tengan la misma energía en un momento dado. Por el contrario, uno de los resultados fundamentales de la mecánica cuántica es que, para los electrones que se mueven en el interior de un metal, solo son posibles ciertas

energías, y que, cada nivel de energía, no puede estar ocupado por más de dos electrones (que tienen orientaciones contrarias del spin). La consecuencia de todo esto es que para poder acomodar el gran número de electrones de conducción que hay en el metal (uno o más por cada átomo), llenando sucesivamente con pares de electrones los niveles permitidos, la energía de los niveles ocupados más altos es muy superior al valor clásico antes mencionado. La energía en la parte superior de esta banda ocupada es equivalente a la energía media de un electrón «clásico» a una temperatura de más de 10.000° K. Cálculos en los que no entraremos demuestran que la distribución de energías de los electrones de conducción es la dada en la Fig. 7.22, en la que se ha trazado la curva de distribución a

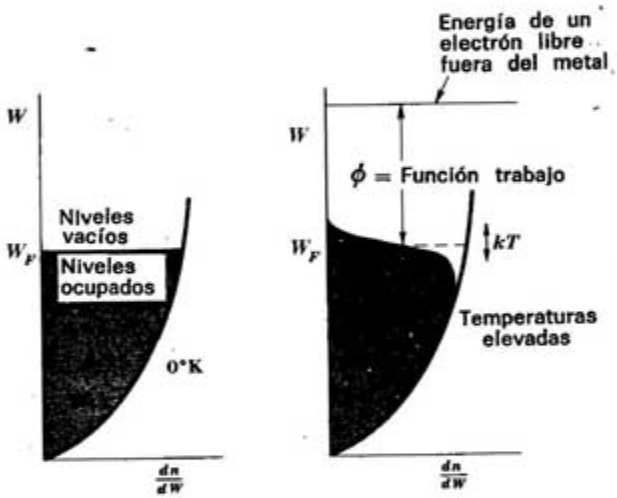


Fig. 7.22 Distribución de Fermi de los niveles energéticos de los electrones de conducción en un metal. dn/dW es el número de niveles de energía disponibles por unidad de volumen y por unidad de energía. A 0° K están llenos todos los niveles hasta W_F, el nivel de Fermi. A temperaturas más elevadas algunos electrones de la parte superior de la distribución son excitados térmicamente a niveles superiores por encima de W_F, dejando las vacantes correspondientes entre los niveles más altos de los ocupados a 0° K.

0° K y a una temperatura elevada. Estas curvas indican la forma en que los niveles de energía permitidos están ocupados por electrones. La magnitud dn/dW es el número de niveles permitidos en el intervalo de energías dW. La parte sombreada de la gráfica indica los niveles ocupados por electrones. A temperaturas muy bajas están llenos todos los niveles hasta un valor máximo de energía, llamado el nivel de Fermi, W_F. A temperaturas elevadas algunos electrones de la parte superior de la distribución son excitados a niveles superiores al W_F, dejando algunos más bajos sin ocupar.

La energía necesaria para arrancar un electrón de la parte superior de la distribución permitiendo que escape del metal, se llama *función trabajo*. Son las diferencias en la función trabajo de los diferentes metales las que dan lugar al potencial de contacto entre los mismos. Esto puede demostrarse analizando la serie de fenómenos que tienen lugar cuando los dos metales se ponen en contacto. En la Fig. 7.23*a* se han dibujado los diagramas de energía correspon-

dientes a dos metales A y B cuando aún están separados. Las ordenadas de ambos diagramas se han ajustado de modo que las energías de electrones que justamente han conseguido escapar de los dos metales sean iguales. Llamaremos a esta energía mínima de escape W_∞. Debido a la diferencia entre las funciones trabajo ϕ_A y ϕ_B, los niveles de Fermi W_F, están a distinta altura en la escala de energías. Cuando los dos metales se ponen en contacto íntimo, los electrones de la parte superior de las distribuciones pueden moverse

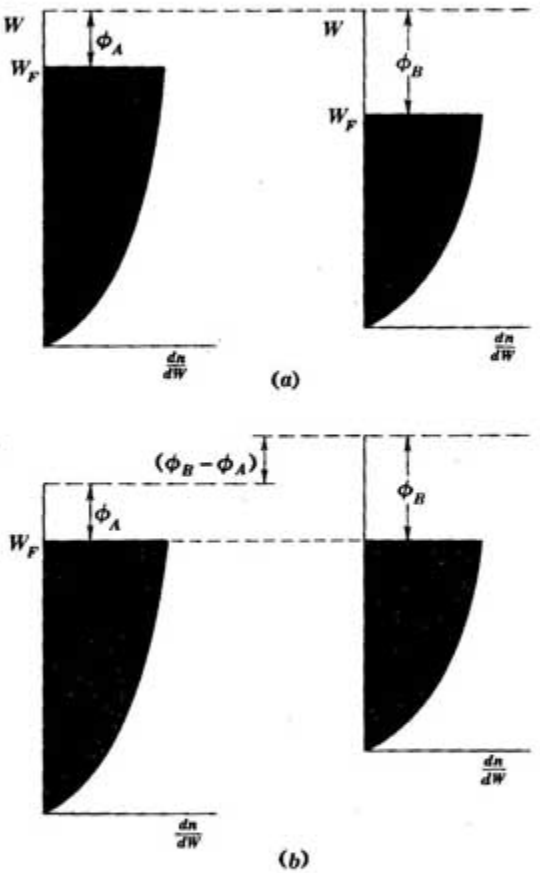


Fig. 7.23 ***(a) Representación esquemática de los potenciales de dos metales descargados A y B. Los valores absolutos de las ordenadas se ajustan de modo que den la misma energía para electrones que tengan justamente la energía para escapar, W_∞. (b) Potenciales de los dos metales cuando están en contacto. La carga se redistribuye de modo que los niveles de Fermi queden a igual altura. La diferencia de potencial de contacto es $(\phi_B - \phi_A)$.***

libremente pasando de uno a otro de los metales. Existirá un paso neto de electrones del que tiene nivel de Fermi más alto al otro. Este paso de cargas se manifiesta en una variación del potencial de las dos piezas metálicas como se indica en la Fig. 7.23*b*. Este paso de electrones cesa cuando las energías de los electrones en la parte superior de las distribuciones es la misma para ambos metales. Comparado con el número de electrones en la banda de conducción, el número de electrones que han de pasar de un metal al otro para llevar los niveles de energía a la posición de equilibrio, cambiando así el potencial electrostático, es muy pequeño. Así, pues, en el es-

tado final el nivel que limita los estados ocupados permanece sensiblemente inalterado respecto al metal. Esto es, el efecto principal es el desplazamiento de los niveles de referencia en la escala de energías hasta una posición relativa tal que los niveles de Fermi se igualen. Como consecuencia, y como se ha dibujado en la figura, el potencial de contacto es igual a la diferencia entre las funciones trabajo. Estas resultan ser del orden de 1 a varios electrón-voltios.

Si se forma un circuito completo con metales de varias clases, los potenciales de contacto en las soldaduras se compensan y no hay fem neta en el circuito. Sin embargo, como el potencial de contacto varía con la temperatura, si en el caso de dos metales las dos soldaduras están a temperaturas diferentes existe una fem neta igual a la diferencia entre los dos potenciales de contacto. Esta es la fem térmica de la que se hace uso en los pares termoeléctricos para medir temperaturas. Este efecto fue descubierto por Seebeck en 1821. Los valores ordinarios de esta fem son del orden de 10^{-6} volt/°K. Los pares termoeléctricos no presentan una variación lineal de su fem con la temperatura y, por tanto, para medidas de precisión deben calibrarse experimentalmente. El inverso del efecto Seebeck es el llamado efecto Peltier, según el cual la soldadura bimetálica se enfría cuando la corriente pasa en un sentido y se calienta cuando pasa en sentido opuesto. En la práctica, el calentamiento de tipo óhmico o resistivo, aparecerá superpuesto al calentamiento o enfriamiento debido al efecto Peltier.

El efecto Thomson está íntimamente relacionado con los efectos Peltier y Seebeck. En un metal *único*, si uno de los extremos está más caliente que el otro, los electrones del extremo más caliente tienden a difundirse ligeramente más de prisa que los del extremo frío. Esto da lugar a una pequeña diferencia de potencial entre ambos extremos, suficiente para contrarrestar el flujo de electrones que en otro caso tendría lugar. Este efecto puede observarse al hacer pasar una corriente por un conductor a lo largo del cual existe un gradiente térmico. Además del calentamiento i^2R, existirá un calentamiento o enfriamiento extra según los sentidos relativos de las corrientes eléctrica y térmica.

Estas fuerzas electromotrices térmicas proporcionan un método para la conversión directa de energía calorífica en eléctrica. Actualmente se está investigando mucho para conseguir desarrollar generadores prácticos basados en la fem térmica. Sin embargo, el bajo rendimiento de conversión ha impedido hasta ahora que este tipo de generadores alcance gran importancia práctica.

PROBLEMAS

7.1 La densidad de corriente en un conductor de sección transversal circular y radio a varía con el radio según $j = j_0 r$. Calcular la corriente total.

7.2 Por un hilo conductor está pasando corriente de izquierda a derecha. ¿Existe algún procedimiento para que pueda ponerse de manifiesto el signo de los portadores de carga?

7.3 Por un hilo de 1 mm^2 de sección transversal pasa una corriente de 10 amp. Si la densidad de electrones móviles en el hilo es de $10^{27}/m^3$, calcular la velocidad media de deriva de estos electrones.

7.4 La resistividad ρ del cobre a la temperatura ambiente es $1{,}7 \times 10^{-8}$ ohm-m. Si la densidad de electrones móviles es $10^{27}/m^3$, calcular el tiempo de relajación τ de los electrones en el cobre.

7.5 Calcular la resistencia de un bloque de cobre de 20 cm de longitud y 2 cm^2 de área transversal. La conductividad σ del cobre es $0{,}59 \times 10^8$ ohm-m^{-1}.

7.6 Se unen doce resistencias de valor R formando con ellas las aristas de un cubo. Hallar la resistencia equivalente entre dos vértices opuestos diagonalmente sobre una cara de este cubo.

7.7 Entre dos conductores de baja resistencia se conecta en la forma indicada en la Fig. P 7.7 una lámina delgada y cuadrada de un material uniforme. Si la lámina tiene 1 cm de lado, la resistencia entre los dos conductores es de 1 ohm. ¿Cuál sería la resistencia del mismo dispositivo si se empleara una lámina de 2 cm de lado?

Fig. P 7.7

7.8 *a*) Calcular la resistencia entre los puntos a y b de la Fig. P 7.8. $R_1 = 2$ ohm, $R_2 = 3$ ohm, $R_3 = 4$ ohm, $R_4 = 6$ ohm y $R_5 = 5$ ohm.

b) Calcular la potencia disipada en cada resistencia si la diferencia de potencial entre a y b es de 10 voltios.

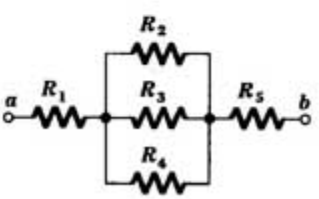


Fig. P 7.8

7.9 Un bloque de material de 10 cm de largo y 2 × 1 cm de dimensiones transversales presenta una resistencia entre sus extremos de 10^{-4} ohm. ¿Cuál será su

resistencia si se le deforma de modo que se reduzca a 5 cm de largo manteniendo su sección uniforme y admitiendo que no hay cambio en la resistividad?

7.10 En el circuito de la Fig. P 7.10,

a) Hallar la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* en función de R_1, R_2 y R.

b) Calcular el valor numérico de esta resistencia si $R_1 = 4$, $R_2 = 2$ y $R = 1$.

c) Comparar el resultado de la parte *b* con el obtenido cuando se quita R.

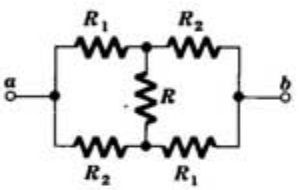


Fig. P 7.10

7.11 Hallar la resistencia efectiva (entre los terminales *a* y *b*) de una serie indefinida de resistencias conectadas como se indica en la Fig. P 7.11, si todas tienen un mismo valor R.

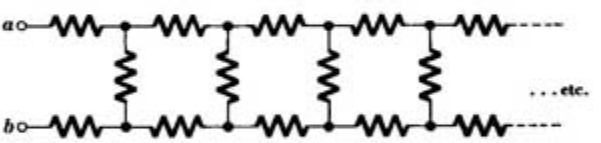


Fig. P 7.11

7.12 Un generador hace pasar una corriente constante i por una resistencia R. ¿Cuál es el trabajo realizado en el tiempo necesario para que pase una carga total Q por la resistencia? ¿Cuál es la potencia consumida? ¿Cuál es la velocidad de generación de calor en la resistencia en calorías por segundo?

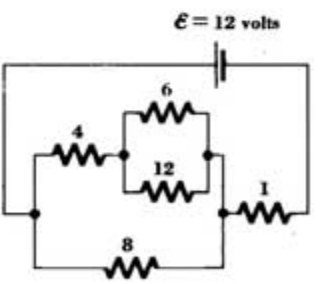


Fig. P 7.13

7.13 En el circuito dibujado en la Fig. P 7.13 la resistencia interna de la batería (no indicada) es de 1 ohm. Los valores de las restantes resistencias en ohms figuran en el diagrama. Calcúlese:

a) Corriente suministrada por la batería.

b) Corriente en cada resistencia.

c) Potencia disipada en cada resistencia y en la interna de la batería.

d) Potencia generada por las fuerzas químicas en la batería.
e) Diferencia de potencial entre los bornes de la batería.

7.14 La resistencia interna de una pila seca aumenta gradualmente con el tiempo, aun cuando la pila no esté en uso. Sin embargo, la fem permanece muy constante a 1,5 voltios. Frecuentemente, en el momento de la compra para comprobar la edad de las pilas secas se prueban conectando un amperímetro directamente entre sus terminales y midiendo la corriente. La resistencia del amperímetro es tan pequeña que la pila está prácticamente en cortocircuito.
a) La corriente de cortocircuito de una pila reciente de un cierto tipo es de 30 amp. ¿Cuál es su resistencia interna?
b) ¿Cuál será la resistencia interna si la corriente de cortocircuito es únicamente de 10 amp?

7.15 Se desea medir una fem $\mathcal{E}$ desconocida mediante un circuito potenciométrico, como se indica en la Fig. P 7.15. Demostrar que cuando el circuito aún no está equilibrado la corriente que pasa por el galvanómetro viene dada por

$$i_g = \frac{[R_2/(R_1 + R_2)]\, V - \mathcal{E}}{[R_1R_2/(R_1 + R_2)] + R_g}$$

La resistencia interna de la batería y la resistencia del galvanómetro se consideran despreciables.

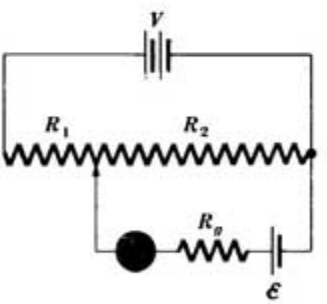


Fig. P 7.15

7.16 Hallar la corriente en cada una de las ramas del circuito indicado en la Fig. P 7.16. $V_1 = 5$ volts, $V_2 = 2$ volts, $R_1 = 3$ ohms, $R_2 = 2$ ohms y $R_3 = 4$ ohms.

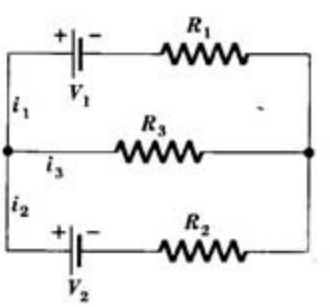


Fig. P 7.16

7.17 *a*) Un galvanómetro se desvía hasta el fin de la escala cuando $i = 1$ miliampere (ma). Se desea convertirlo en voltímetro que para 10 voltios se desvíe a fondo de escala. La resistencia interna del galvanómetro es de 10 ohms. Indicar cómo conseguirlo. (Dar el circuito y la información necesaria.)

b) Si se necesita en su lugar un amperímetro que marque a fondo de escala 10 ma, ¿cómo puede hacerse?

7.18 En la Fig. P 7.18 se indica el circuito interior de un voltímetro de tres escalas cuyas bornas están marcadas 3, 15 y 150 voltios respectivamente. La resistencia del galvanómetro de bobina móvil empleado es de 15 ohms y una corriente de 1 ma en su bobina hace que se desvíe a fondo de escala. Hallar el valor de las resistencias indicadas y la resistencia que en conjunto presenta el voltímetro en cada una de sus escalas.

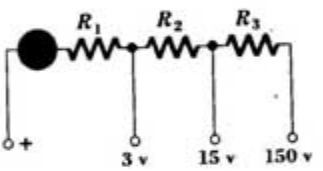


Fig. P 7.18

7.19 La resistencia del galvanómetro de bobina móvil en el amperímetro indicado en la Fig. P 7.19 es de 25 ohms, y se desvía a fondo de escala con 0,01 amp. Hallar el valor de las resistencias necesarias para construir un amperímetro de varias escalas que se desvíe a fondo de escala con corrientes de 10, 1 y 0,1 amp, respectivamente.

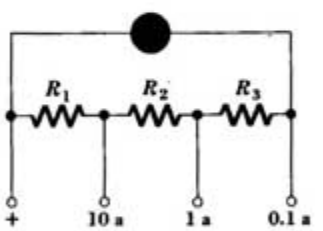


Fig. P 7.19

7.20 La resistencia interna de la batería indicada en el circuito de la Fig. P 7.20 es R_i. Determinar la relación R_i/R_L para obtener una disipación de potencia máxima en la resistencia de carga R_L.

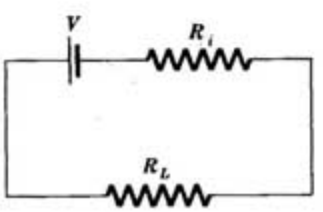
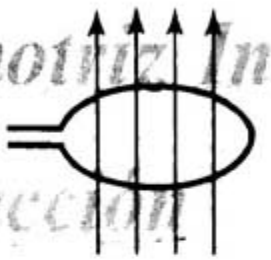


Fig. 7.20

OCHO

Fuerza Electromotriz Inducida, Autoinducción



8.1 Introducción

Hemos estudiado hasta ahora el campo eléctrico debido a las cargas estáticas y el campo magnético de las cargas en movimiento. En este capítulo vamos a añadir una tercera piedra angular a la estructura de la teoría electromagnética al considerar los efectos de los campos magnéticos *variables*. Empezaremos por examinar con detalle algunas de las consecuencias de mover un circuito en el seno de un campo magnético, basando nuestras conclusiones en fenómenos que hemos estudiado ya. Esto nos conducirá a expresar de nuevo ideas anteriores haciendo uso del concepto de fuerza electromotriz inducida. Finalmente, veremos que tanto la experiencia como ciertas consideraciones generales conducen en forma natural a la ley de Faraday de la inducción. Esto nos prepara para estudiar los elementos inductivos en circuitos de corriente alterna y es también fundamental para la comprensión de las ondas electromagnéticas.

8.2 Fuerza electromotriz debida al movimiento

En general, cuando se desplaza un circuito de forma fija en una región en la que existe un campo magnético, aparecé en el circuito

una fem inducida. Podemos calcular la magnitud de este efecto aplicando las leyes que dan la fuerza magnética que obra sobre una carga en movimiento. En la Fig. 8.1 se ha dibujado un caso sencillo, el de una espira rectangular conductora que se mueve hacia la derecha en un campo que es perpendicular al plano de la espira y que varía únicamente a lo largo del eje x. Vamos a calcular ahora la fuerza de origen magnético ejercida sobre una carga q, situada

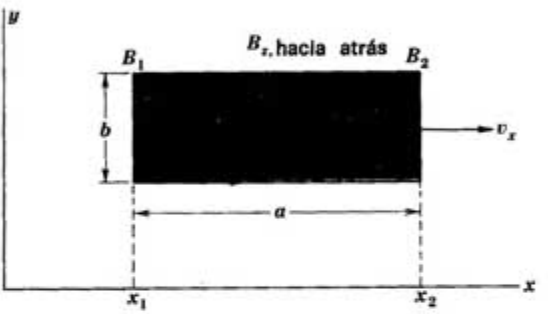


Fig. 8.1 El movimiento en un campo magnético produce una corriente en una espira conductora.

en una posición fija respecto a la espira. La Ec. (6.25) nos da esta fuerza, $F = qv_xB_z$, estando dirigida F hacia la parte positiva del eje y si q es positiva, B_z es la inducción magnética hacia dentro del papel y v_x la velocidad con que se mueve la espira en la dirección x. Esta fuerza actuará sobre todas las cargas existentes en el hilo y realizará trabajo sobre aquellas que puedan moverse verticalmente por los lados de la espira. Solo necesitamos tomar en cuenta estos lados verticales, puesto que en los horizontales la fuerza de origen magnético es perpendicular, y no puede realizar trabajo sobre cargas que se muevan a lo largo de ellos. La fem que aparece en la espira puede hallarse calculando el trabajo por unidad de carga realizado por las fuerzas magnéticas al recorrer una carga toda la espira. De acuerdo con nuestro convenio anterior, de considerar positiva una corriente que circule por la espira en sentido antihorario, tomaremos las fuerzas que tengan este sentido como positivas. Según esto, y como se ve en la Fig. 8.1, la fuerza F_2 en el lado de la derecha de la espira es positiva, mientras que la fuerza F_1, aunque dirigida igualmente hacia arriba, es negativa. La fuerza magnética neta en toda la espira es, pues, $F_2 - F_1$. Para aclarar la situación, supongamos que el valor B_2 del campo en el lado derecho de la espira es mayor que su valor B_1 en el de la izquierda. La fuerza neta entonces es en sentido antihorario, o sea, positiva.

El trabajo realizado por las fuerzas magnéticas al hacer recorrer a una carga q la espira vendrá dado por

$$W = \oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = (F_2 - F_1)b = |B_2 - B_1|qv_xb = -q\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.1}$$

en la que $d\Phi/dt$ es la derivada respecto al tiempo del flujo de inducción magnética abrazado por la espira. Este resultado se deduce del hecho de que $Bbv_x = Bb\,dx/dt$, y $B_2 b\,dx$ representa el aumento de flujo en el tiempo dt correspondiente al lado derecho de la espira, mientras que $B_1 b\,dx$ es la disminución de flujo correspondiente al lado izquierdo en el mismo tiempo. La variación neta de flujo a través de la espira con el tiempo es, pues, $|B_2 - B_1|\,v_x b = -d\Phi/dt$. El signo negativo procede del hecho que hemos elegido B en la dirección negativa (hacia dentro del papel, o sea alejándose del observador). A medida que la espira se mueve hacia la derecha aumenta el valor de este flujo negativo.

Si dividimos la Ec. (8.1) por q, tendremos la fem

$$\frac{W}{q} = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.2}$$

Esta fem arrastrará las cargas alrededor de la espira exactamente igual que la de una pila. Por tanto, si la resistencia de la espira es R, la corriente estará dada por $\mathcal{E} = iR$. Cuando una espira se mueve en una región en la que la inducción magnética varía de un punto a otro aparece una fem que puede expresarse en función de la velocidad de variación del flujo magnético abrazado por la espira. En la Sec. 8.4 discutiremos el signo de esta fem en relación con el cambio de flujo.

8.3 Ley de inducción de Faraday

La regla que acabamos de encontrar relativa a la generación de una fem basándonos en las fuerzas magnéticas sobre cargas en movimiento puede hacerse mucho más general. En la Fig. 8.2 puede

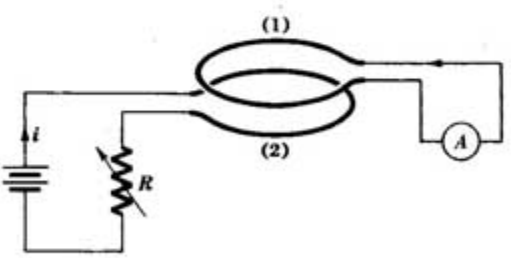


Fig. 8.2 Fem inducida según la ley de Faraday.

verse una bobina (1) con un galvanómetro en serie, colocada sobre otra espira (2). Esta última está conectada a una batería que hace pasar una corriente i y, por tanto, da lugar a un campo de inducción magnética en la región de las bobinas. Cuando se baja la espira 1 hacia la 2, se observa en la primera una corriente en la dirección indicada. Aunque la geometría es algo diferente a la del caso anterior-

mente estudiado, podríamos demostrar fácilmente que esta corriente inducida en la espira 1 está de acuerdo exactamente con la Ec. (8.2). El movimiento de la espira 1 la lleva a una región donde B es mayor, resultado una fem que podría calcularse, o bien por la variación $d\Phi/dt$ en la espira, o bien más laboriosamente por medio de las fuerzas magnéticas sobre las cargas de la espira 1. Si en vez de acercarla, separamos la espira 1 de la 2, la corriente inducida en la primera se invierte como era de esperar.

Es interesante preguntarse lo que ocurriría si en vez de bajar la espira 1 hacia la 2, levantamos la espira 2 hacia la 1. Muy poco podríamos decir tomando como base nuestros anteriores razonamientos sobre la fem inducida, puesto que ahora nos encontramos con un caso que no hemos investigado—el de la fuerza sobre una carga en reposo situada en un campo en movimiento—. Sin embargo, existe un argumento muy fuerte para creer que la corriente inducida resultante en la espira 1 será la misma, se mueva (1) hacia (2), o viceversa. Si *existiera* una diferencia entre estos dos experimentos podría establecerse un sistema de referencia absoluto para el movimiento. De hecho, el resultado experimental es que no hay diferencia cualquiera que sea la espira que se mueve. *Solamente importa el movimiento relativo.* Hagamos notar incidentalmente, que éste es uno de los postulados de la teoría de la relatividad especial de Einstein, afirma que no existe un sistema de referencia *absoluto* para el movimiento. Todas las leyes de la electricidad y el magnetismo son *relativisticamente invariantes;* es decir, los resultados que dan son siempre acordes con la relatividad. Esto no es cierto en el caso de la formulación newtoniana de las leyes de la mecánica.

Con las dos espiras puede hacerse un tercer tipo de experimentos. Manteniendo esta vez las dos espiras en reposo (o, en general, si se mantienen fijas una a la otra), se hace cambiar el flujo en la espira 1 variando la corriente en la espira 2. Tampoco en este caso podemos predecir por conocimientos anteriores si el resultado de este tipo de variación de $d\Phi/dt$ es idéntico o no al debido al movimiento. Experimentalmente se encuentra que de hecho el resultado es idéntico.

La afirmación general,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.3}$$

es cierta para cualquier trayectoria cerrada, independientemente de la causa de la variación temporal del flujo magnético abrazado por la trayectoria, y constituye el hecho experimental conocido como ley de Faraday de la inducción. Como hemos visto en la sección anterior es consistente con la ley de fuerzas magnéticas sobre cargas en

movimiento, pero en su forma más general debe considerarse como una ley independiente. Otro aspecto importante de la ley de Faraday es que se aplica a cualquier región del espacio, independientemente de la presencia de un conductor. Este hecho es esencial en la propagación de las ondas electromagnéticas.

Los experimentos de Faraday sobre la fem inducida y las leyes de la inducción fueron publicados entre 1831 y 1854. En el párrafo siguiente,[1] publicado en 1832, Faraday describe uno de los numerosos experimentos mediante los que desarrolló sus ideas sobre la fem inducida:

> Se arrollaron a un gran bloque de madera doscientos tres pies de hilo de cobre en un solo trozo; otros doscientos tres pies de hilo semejante se interpusieron en espiral entre las vueltas de la primera bobina, y se evitaron los contactos metálicos entre ellas mediante un bramante. Una de estas hélices fue conectada a un galvanómetro, y la otra a una batería, de un centenar de pares de placas de cuatro pulgadas cuadradas, bien cargada. Cuando se realizó el contacto, hubo un efecto brusco y muy ligero sobre el galvanómetro, y también hubo un efecto ligero semejante cuando se rompió el contacto con la batería. Pero mientras la corriente voltaica continuaba pasando por una de las hélices no pudo percibirse ninguna desviación galvanométrica o efecto de inducción sobre la otra hélice, aunque la potencia activa de la batería era grande, como lo prueba el calentamiento sobre toda su propia hélice y por el brillo de la descarga cuando se hizo a través de carbón animal.

Faraday resume los resultados de toda una serie de experimentos de este tipo con corrientes variables y con imanes en movimiento, en el breve párrafo que sigue,[2] en el que, teniendo presente el gran cambio que ha habido en la nomenclatura desde aquella época, vemos que se está refiriendo a la existencia de la fem inducida:

> Todos estos resultados demuestran que el poder de inducir corrientes eléctricas está excitado circularmente por una resultante magnética o eje de poder, al igual que el magnetismo circular depende de, y está exhibido, por una corriente eléctrica.

8.4 Ley de Lenz

Vamos ahora a examinar la relación que existe entre el sentido de la fem inducida y el signo de la variación del flujo. En la Sec. 8.2 demostramos, al discutir la fem debida al movimiento, que en la

[1] Michael Faraday, Experimental Researches in Electricity, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, (A) **122**, págs. 127, 155 (1832).
[2] *Ibid.*

ecuación aparecía un signo negativo cuando se emplea el convenio de corriente y fem positivas para una rotación en sentido antihorario y flujo positivo si está dirigido apuntando hacia el observador. Esto se cumple en todos los casos regidos por la ley de Faraday. Este signo negativo en la relación entre fem inducida y $d\Phi/dt$ se deduce directamente del principio de conservación de la energía, y constituye la llamada ley de Lenz. Usaremos el ejemplo de la Sec. 8.2 para determinar las consecuencias de esta regla. En él, el movimiento de la espira aumenta la magnitud del flujo Φ, que es negativo, puesto que apunta hacia dentro. Por tanto, $d\Phi/dt$ es negativo y, como consecuencia, la fem es positiva, o sea en sentido antihorario. Cualquier corriente producida en la espira por las fuerzas magnéticas es, pues, positiva y, por tanto, produce un flujo adicional Φ', que es positivo, o sea, hacia fuera. Por tanto, el flujo inducido se opone a la variación del flujo producido exteriormente. Con este argumento podemos siempre determinar el sentido de la fem inducida.

Podemos demostrar que el principio de conservación de la energía exige este tipo de comportamiento por reducción al absurdo. Supongamos que tenemos una espira conductora en una región del espacio en la que originalmente no hay campo magnético. Apliquemos un pequeño campo exteriormente (o supongamos que una pequeña fluctuación en los movimientos térmicos de los electrones en la espira produce una corriente muy pequeña durante un instante, generando, por tanto, un campo de inducción magnética muy pequeño en la espira). Si fuera cierta la afirmación opuesta a la ley de Lenz, esta transición de campo cero a un pequeño campo daría lugar a una fem y a la corriente correspondiente que haría aumentar aún más el flujo magnético y en el mismo sentido. Al aumentar la derivada temporal del flujo se produciría aún más corriente dando lugar a nuevo aumento, y, por tanto, a la generación casi explosiva de un campo y una corriente muy elevadas. El proceso terminaría probablemente cuando la corriente en el hilo fuera tan grande que la energía disipada fundiera el hilo. Esta cadena de fenómenos contradice claramente el principio de conservación de la energía, de modo que, de hecho, hemos probado que debe cumplirse la ley de Lenz. Por tanto, la fem inducida debe siempre actuar en la forma enunciada de «oponerse» a la causa que la origina.

8.5 Ejemplos

a) Conservación de la energía en un generador elemental. Estudiaremos los aspectos energéticos de la fem inducida considerando un generador eléctrico muy elemental basado en la inducción de Faraday. En la Fig. 8.3 se indica una varilla que puede deslizarse sobre

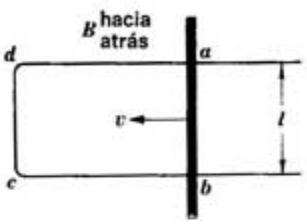


Fig. 8.3 Conductor que se desliza sobre un cuadro estacionario en un campo B.

otras dos fijas formando una espira situada en un campo uniforme B. Empujamos la varilla, como se indica, con una velocidad constante v. Este movimiento dará lugar a una variación del flujo magnético que atraviesa la espira y a la generación de una fem,

$$\frac{d\Phi}{dt} = vlB = -\mathcal{E}$$

En este caso $d\Phi/dt$ es positivo, puesto que Φ está dirigido hacia dentro y disminuye a medida que el área de la espira se reduce. Esto significa que la fem es negativa, o sea en sentido de las agujas del reloj. (Podríamos también haber determinado esta fem por el método seguido en la Sec. 8.2.) Como resultado de esta fem pasa una corriente

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{Blv}{R}$$

donde R es la resistencia total de la espira.

La velocidad de disipación de energía eléctrica en la resistencia es

$$P = \mathcal{E}i = \frac{B^2l^2v^2}{R} \quad \text{vatios}$$

Evidentemente, la fuente de esta energía es el trabajo mecánico realizado al mover la varilla. La fuerza ejercida sobre una varilla que conduce la corriente i en un campo B es: $F = Bil$, así que la velocidad de producción de trabajo mecánico será

$$\frac{dW}{dt} = Fv = Blvi = \frac{B^2l^2v^2}{R} \quad \text{vatios}$$

Hemos demostrado, pues, la igualdad entre la rapidez de producción de trabajo mecánico y la de disipación de energía.

b) Trabajo mecánico realizado para mover una bobina en un campo magnético. Vamos a determinar el trabajo mecánico necesario para mover una bobina por la que pasa una corriente i constante en un campo magnético (Fig. 8.4). Más adelante emplearemos este resultado en el cálculo de la inductancia mutua (Sec. 8.6). Supongamos que la corriente está producida por una fuente externa, y circula en sentido positivo (antihorario). Como consecuencia de esta corriente, actúan sobre los lados verticales las fuerzas F_1 y F_2 que se indican, siendo

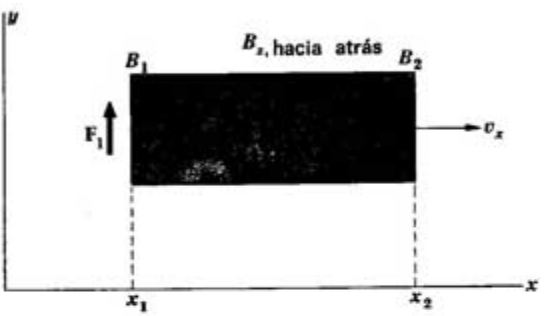


Fig. 8.4 Trabajo realizado al mover una espira en un campo magnético.

$$F_1 = B_1 ib \qquad \text{y} \qquad F_2 = B_2 ib$$

Si B es perpendicular al plano xy y varía únicamente según el eje x, las fuerzas sobre los lados superior e inferior de la espira son iguales y opuestas, y, por tanto, se anulan. En cualquier caso, como movemos la espira en la dirección del eje x, estas fuerzas tienen la dirección del eje y no contribuyen al trabajo realizado. Para concretar, supondremos que B aumenta al crecer x, de modo que $B_2 > B_1$. La fuerza magnética neta sobre la espira es $-F = -(F_2 - F_1)$, y está dirigida hacia la izquierda. El signo negativo expresa precisamente que esta fuerza tiene el sentido negativo de las x.

El trabajo exterior realizado al mover la espira hacia la derecha una distancia dx es

$$dW = F\,dx = (F_2 - F_1)\,dx = ib|B_2 - B_1|\,dx \tag{8.4}$$

Deseamos relacionar este trabajo mecánico exterior al cambio neto del flujo de inducción magnética de origen externo que atraviesa la espira. El cambio de flujo cuando la espira se desplaza una distancia dx es

$$b|B_2 - B_1|dx = -d\Phi$$

El signo es negativo porque, si bien un desplazamiento de la espira en la dirección positiva del eje x aumenta en valor absoluto el flujo Φ a través de la espira, en este caso Φ es negativo, por estar dirigido alejándose del observador. Comparando esta ecuación con la (8.4) resulta

$$dW = -id\Phi \tag{8.5}$$

Si la espira tuviera N vueltas, el trabajo mecánico realizado sería

$$dW = -Ni\,d\Phi \tag{8.6}$$

Aplicándose aquí el convenio de signos usual: i positiva si circula contra las agujas del reloj, y Φ positivo si se dirige hacia fuera, hacia el observador. En el ejemplo escogido, como i es positivo y $d\Phi$ es negativo, el trabajo exterior realizado es positivo.

El cálculo anterior se limita al trabajo *mecánico* realizado al mover una espira en un campo magnético. Necesariamente debe realizarse también algún trabajo eléctrico. A fin de compensar la fem inducida en la espira por el cambio del flujo a su través, el generador que establece la corriente i en la espira, debe suministrar un trabajo adicional, además del término i^2R. Por otra parte, el movimiento de la espira por la que circula corriente produce un flujo variable en el circuito exterior, que establece el que hemos llamado campo magnético exterior, y el generador que lo alimenta debe también suministrar trabajo para compensar la fem inducida en él. Sin embargo, en este momento no entraremos en detalles sobre este trabajo eléctrico.

c) Un motor elemental. Vamos a emplear el resultado del ejemplo anterior para estudiar un motor simple capaz de convertir energía eléctrica en mecánica. En la Fig. 8.5 se ha dibujado el dispositivo a que nos referimos. La pila de fem $\mathcal{E}_0$ hace que pase una corriente i por la espira, cuya resistencia total es R. La fuerza magnética que actúa sobre la varilla móvil es

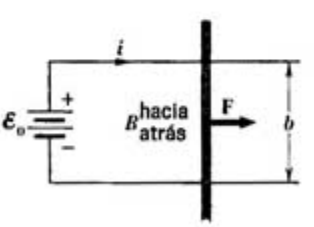


Fig. 8.5 Motor elemental

$$F = ibB = \frac{\mathcal{E}_0}{R}bB$$

La potencia con que esta fuerza F realiza trabajo, cuando la varilla se mueve con velocidad v, es

$$\frac{dW}{dt} = Fv = i\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.7}$$

habiendo empleado la Ec. (8.6) para relacionar el trabajo con la variación de flujo. Se ha omitido el signo menos porque $d\Phi/dt$ es positivo, mientras que i es negativa. La fem inducida por $d\Phi/dt$ debe ser incluida en la ecuación del circuito, la cual se escribirá, por tanto,

$$\mathcal{E}_0 - \frac{d\Phi}{dt} = iR \tag{8.8}$$

Si se multiplica esta ecuación por i, obtenemos

$$\mathcal{E}_0 i = i\frac{d\Phi}{dt} + i^2R = Fv + i^2R \tag{8.9}$$

Por tanto, la batería suministra la potencia $\mathcal{E}_0 i$, que se invierte en trabajo mecánico, con potencia Fv, y en energía disipada en la resistencia del circuito, con potencia i^2R. Los motores se estudiarán con más detalle en el Ejemplo 8.8*d* y en la Sec. 10.13.

8.6 Inductancia mutua M

Vamos ahora a emprender el estudio de la interacción entre dos circuitos debida al flujo magnético que los enlaza. Este flujo común, en combinación con la ley de Faraday, determina que los cambios en uno de los circuitos afecten al otro. Vamos a expresar esta inter-

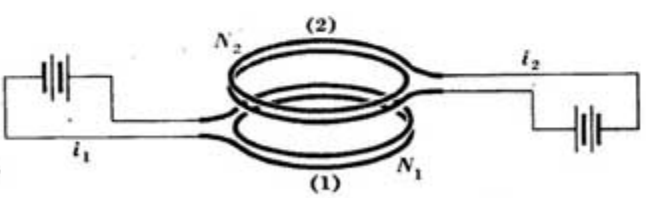


Fig. 8.6 Inductancia mutua entre dos circuitos.

acción en función de la *inductancia mutua* de los dos circuitos. Comencemos por examinar la energía asociada al hecho de aproximar dos circuitos. En la Fig. 8.6 se han dibujado dos bobinas, por las que pasan corrientes i_1 e i_2, y tienen N_1 y N_2 espiras, respectivamente. Supongamos que inicialmente las dos bobinas están muy separadas y vamos a determinar la cantidad de trabajo exterior que debe rea-

lizarse para llevar la bobina 1 a las proximidades de la bobina 2. Haciendo uso del resultado del Ejemplo 8.5*b*, podemos escribir

$$dW = -N_1 i_1 \, d\Phi_{12} \tag{8.6}$$

Donde $d\Phi_{12}$ es el flujo adicional que atraviesa la bobina 1, cuando las dos se aproximan, debido a la corriente que pasa por la 2. El trabajo mecánico total realizado al aproximar las bobinas desde una distancia muy grande es

$$W = \int_{\infty}^{\text{posición final}} dW = -N_1 i_1 \int_{\infty}^{\text{posición final}} d\Phi_{12} = -N_1 i_1 \Phi_{12} \tag{8.10}$$

Podríamos haber alcanzado igualmente bien el estado final, manteniendo fija la bobina 1 y acercando la 2 desde el infinito. Esto nos daría

$$W = -N_2 i_2 \Phi_{21} \tag{8.11}$$

Y como los estados finales son equivalentes, independientemente del modo con que se hayan alcanzado, estas dos energías deben ser iguales, así que podemos escribir

$$N_2 i_2 \Phi_{21} = N_1 i_1 \Phi_{12}$$

o

$$\frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \tag{8.12}$$

Se denomina inductancia mutua M entre las dos bobinas al valor de estas razones. La magnitud $N_1\Phi_{12}$ se denomina *flujo enlazante* en la bobina 1 debido a la corriente en la bobina 2, esto es, el flujo en (1) debido a la corriente en (2) multiplicado por el número de espiras en (1). Con esta nomenclatura, la inductancia mutua es simplemente *el flujo enlazante en una bobina cuando pasa una corriente unidad en la otra.* Además, resulta así que, independientemente de la forma geométrica de las dos bobinas, $M_{12} = M_{21}$, que son respectivamente

$$M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2} \qquad \text{y} \qquad M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \tag{8.13}$$

tienen, como hemos visto, el mismo valor.

Vamos a emplear ahora el concepto de inductancia mutua entre dos bobinas para calcular el efecto de un cambio en la corriente de una de ellas sobre la corriente que circula por la otra. Supongamos que se mantienen fijas en el espacio las bobinas de la Fig. 8.6 y que

se cambia, por ejemplo, la corriente en la bobina 2. El resultado es una fem inducida en la bobina 1 cuyo valor es

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt}$$

Como según la Ec. (8.13) $\Phi_{12} = Mi_2/N_1$, podemos diferenciar esta expresión para calcular la variación de Φ_{12} cuando se cambia i_2, obteniendo

$$d\Phi_{12} = \frac{M}{N_1} di_2$$

Y al sustituir en la anterior, tenemos

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{voltios} \tag{8.14}$$

Análogamente, si se hace variar i_1, la fem inducida en la bobina 2 será

$$\mathcal{E}_2 = -M \frac{di_1}{dt} \quad \text{voltios} \tag{8.15}$$

La unidad de inductancia mutua en los sistemas de unidades mks y práctico es el *henry*, así llamada en honor del científico americano Joseph Henry, que desarrolló el concepto de inductancia casi simultáneamente con Faraday. La inductancia mutua es unidad cuando el cambio de 1 amp/seg en una bobina, induce una fem de 1 voltio en la otra. Por tanto, un henry equivale a un volt-seg por ampere. En la Sec. 8.8 veremos un ejemplo sencillo de los efectos que se presentan debido a la inductancia mutua.

8.7 Autoinducción

La inducción de Faraday tiene la misma importancia en el caso de un circuito único, como podemos ver estudiando los fenómenos que se presentan en una bobina aislada, tal como la que se indica en la Fig. 8.7. Si se hace cambiar la corriente que pasa por esta bo-

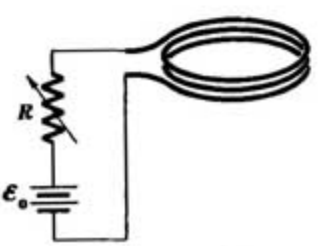


Fig. 8.7 Autoinducción de un circuito.

bina (por ejemplo, variando la resistencia R), el flujo que atraviesa la bobina cambia, y aparece la consiguiente fem inducida en ella. Por analogía con la definición de inductancia mutua, podemos definir la autoinducción L según

$$L = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1} \tag{8.16}$$

Siendo Φ_{11} el flujo en la bobina debido a su propia corriente, de modo que la autoinducción es el *flujo enlazante en un circuito cuando pasa por él una corriente unidad.* Como antes, para la fem inducida por la corriente variable, obtendremos

$$\varepsilon_1 = -\frac{N_1 d\Phi_{11}}{dt}$$

Y como la Ec. (8.16) permite escribir

$$\Phi_{11} = \frac{L_1 i_1}{N_1}$$

será

$$d\Phi_{11} = \frac{L_1}{N_1} di_1$$

Sustituyendo en la ecuación que nos da ε_1 resulta

$$\varepsilon_1 = -L\frac{di_1}{dt} \quad \text{voltios} \tag{8.17}$$

Cualquier circuito cerrado posee autoinducción, aunque no exista ninguna bobina. En efecto, un circuito completo constituye, por lo menos, una espira que es atravesada por un cierto flujo cuando pasa la corriente. Sin embargo, si el área de la espira se hace muy pequeña, el flujo enlazante también lo será y la autoinducción resultará muy pequeña. La unidad de autoinducción es también el henry.

Antes de proseguir nuestra exposición, hagamos notar que el efecto de la inductancia en un circuito es como el de la inercia en un sistema mecánico. En efecto, cualquier cambio en una corriente estacionaria está acompañado por una fem inducida que tiende a contrarrestar este cambio. Esto resulta análogo a la fuerza ejercida por una masa en movimiento cuando se intenta modificar su velocidad.

8.8 Ejemplos

a) Efecto de la inductancia mutua en los circuitos acoplados. Examinemos, en forma cuantitativa, el comportamiento de los dos cir-

cuitos acoplados por inductancia mutua, que se indican en la Fig. 8.8. La corriente en el circuito 2 puede ser modificada variando R_2. Determinemos el efecto que un cambio di_2/dt en el circuito 2 tiene so-

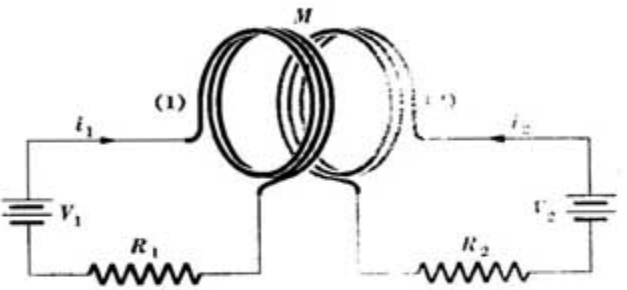


Fig. 8.8 Circuitos acoplados por una inductancia mutua M.

bre la corriente en el circuito 1. Haciendo uso de la Ec. (8.14) podemos escribir directamente la fem inducida en el circuito 1, que es

$$\mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \quad \text{voltios}$$

El signo negativo nos indica que, si la corriente en los dos circuitos circula por las bobinas en el mismo sentido, $\mathcal{E}_1$ se opondrá al generador V_1 cuando di_2/dt sea positiva. Si se invierte la polaridad de V_1, o se hace girar 180° una de las bobinas, $\mathcal{E}_1$ y V_1 actuarán en el mismo sentido si di_2/dt es positiva.

Otro efecto adicional a considerar es el de L_1, la autoinducción del circuito 1. Esta da lugar a otra fem en el circuito 1 que, según la Ec. (8.17), vale

$$\mathcal{E}_1' = -L\frac{di_1}{dt} \quad \text{voltios}$$

y actúa en oposición a di_1/dt. La ecuación correspondiente al circuito 1 será, pues,

$$V_1 \pm M\frac{di_2}{dt} - L_1\frac{di_1}{dt} = i_1R \tag{8.18}$$

Si se conocen el valor de di_2/dt y el sentido en que M actúa sobre el circuito 1, esta ecuación diferencial puede resolverse por métodos semejantes a los seguidos en la Sec. 10.7. Si di_2/dt no es constante, el problema es mucho más complicado. No ha sido necesario tomar en consideración la autoinducción L_2 porque hemos partido de un valor dado de di_2/dt. El efecto que tendría L_2 es producir una fem

inducida en el circuito 2 que debe ser compensada al variar la resistencia R_2 para conseguir que la variación de i_2 tenga lugar con la rapidez deseada.

b) Cálculo de una autoinducción. En pocos casos es fácil calcular la autoinducción de un circuito con una configuración geométrica dada. Como ejemplo, vamos a hacer el cálculo en el caso de una bobina uniforme y muy larga, y despreciaremos el efecto de los extremos que en la práctica reducirían algo el valor calculado debido a que el flujo es menor en los extremos de la bobina. Podemos esperar que el número de vueltas N aparezca como N^2, una vez la N correspondiente al producto $N\Phi$ y la otra por ser Φ mismo proporcional a N. Ya hemos calculado en los Ejemplos 6.3*c* y 6.6*b* el campo B en el interior de un solenoide de N espiras y longitud l, que es $B = \mu_0 Ni/l$. Sustituyendo en la Ec. (8.16), obtenemos para la autoinducción

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad \text{henrios} \tag{8.19}$$

Si se trata de un solenoide toroidal, no hay dispersión del flujo en los extremos y el resultado es exacto.

c) Cálculo de la fem de un generador. En la Fig. 8.9 se indica esquemáticamente un dispositivo para convertir energía mecánica en eléctrica algo más práctico que el considerado en el Ejemplo 8.5*a*.

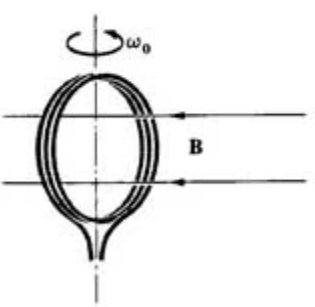


Fig. 8.9 Generador elemental: bobina giratoria en un campo magnético exterior.

En un campo magnético uniforme de inducción B se hace girar una bobina, de N espiras y área A, con una velocidad angular de ω_0 radianes/seg. Vamos a calcular la fem generada mediante la ley de inducción de Faraday. El flujo enlazante que atraviesa la bobina cuando el plano de la misma forma un ángulo θ con la dirección de B, viene dado por

$$N\Phi = NAB \operatorname{sen} \theta = NAB \operatorname{sen} \omega_0 t$$

siendo $\omega_0 t$ el valor de θ en un instante determinado t. Por tanto,

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt} = -\omega_0 NAB \text{ sen } \omega_0 t \tag{8.20}$$

Es decir, este generador da una fem sinusoidal de amplitud $\omega_0 NAB$. El origen de esta fem es el trabajo mecánico realizado al hacer girar la bobina. Este trabajo sería cero (en un sistema sin rozamientos) si no pasa corriente, y aumenta proporcionalmente a la corriente si ésta crece, como ya vimos en el Ejemplo 8.5*a*. En la Sec. 10.12 estudiaremos varios tipos de generadores.

d) Cálculo de la fuerza contraelectromotriz de un motor. En la Fig. 8.10 se ha representado esquemáticamente un motor más prác-

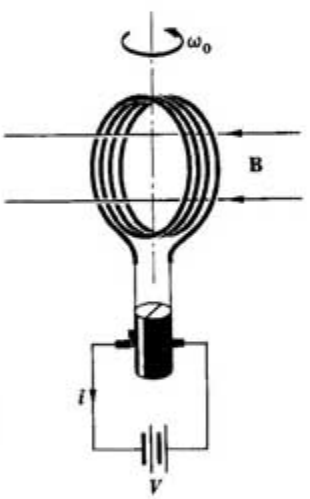


***Fig. 8.10** Motor elemental: bobina por la que circula corriente con un conmutador y situada en un campo magnético exterior.*

tico que el descrito en el Ejemplo 8.5*c*. En éste, el par que actúa sobre una bobina recorrida por una corriente cuando está en un campo magnético, se emplea para hacer girar la bobina. Para invertir la corriente en el instante adecuado del giro se emplea un *conmutador*, de modo que el par actúa siempre en el mismo sentido. Supongamos que la velocidad angular de la bobina es ω_0, y que arrastra en su movimiento un mecanismo exterior determinado. Al igual que en el caso del generador, la rotación de la bobina del motor en un campo magnético da lugar a una fem inducida. Como esta fem actúa de modo que se opone al paso de la corriente en la bobina del motor se denomina *fuerza contraelectromotriz* y estará dada por

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi}{dt} \tag{8.21}$$

siendo N el número de vueltas en la bobina. Si la intensidad del campo magnético es B_0 y el área de la bobina A, tendremos

$$N\Phi = NAB_0 \operatorname{sen} \omega_0 t$$

y

$$-N\frac{d\Phi}{dt} = -NAB_0\omega_0 \cos \omega_0 t$$

El conmutador hace cambiar la forma de la función $d\Phi/dt$, en lugar de variar como cos $\omega_0 t$ tiene el aspecto indicado en la Fig. 8.11.

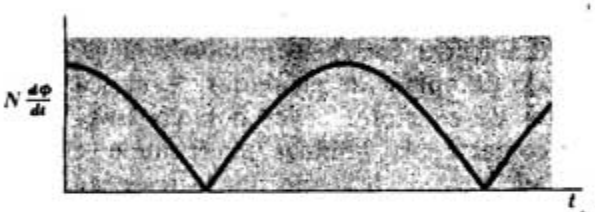


Fig. 8.11 Fuerza contraelectromotriz del motor tal como se ve a través del conmutador.

Por tanto, la fuerza contraelectromotriz varía de forma semejante según expresa la Ec. (8.21). Si llamamos $\mathcal{E}(t)$ a esta fcem que varía periódicamente, la corriente en la bobina vendrá dada por la expresión

$$V - \mathcal{E}(t) = iR$$

y vemos que i también varía con el tiempo. Esta variación se ha dibujado en la Fig. 8.12, en la que i_0 representa la corriente que

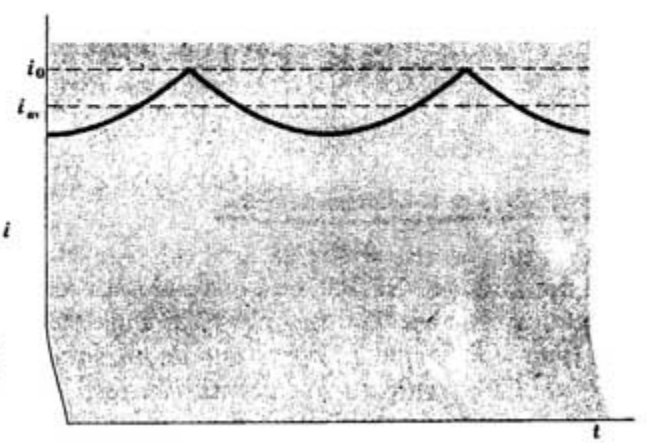


Fig. 8.12 Variación de la corriente en el motor debido a la fuerza contraelectromotriz.

pasaría si la espira se mantuviera en reposo. En este razonamiento hemos despreciado otras modificaciones que se presentarían si la

autoinducción de la bobina a la frecuencia ω_0 fuera importante. La corriente media valdrá

$$V - \overline{\mathcal{E}(t)} = iR$$

siendo $\overline{\mathcal{E}(t)}$ el valor medio de la fem inducida.

En la práctica, en lugar de usar una sola bobina, la parte giratoria de un motor llamada *rotor* está formada por varias bobinas orientadas en ángulos distintos alrededor del eje de rotación. El conmutador conecta la fuente externa de energía sucesivamente a cada bobina de tal modo que se obtiene de cada una el par máximo.

La fuerza contraelectromotriz juega un papel importante en el modo de operar de un motor. Vamos a explicarlo considerando el rotor de un motor cuyas bobinas tengan muy poca resistencia. Si se contecta a las bobinas una fuente de energía pasa una gran intensidad, limitada tan solo por la resistencia de las bobinas, en tanto que el rotor está en reposo. Sin embargo, tan pronto como el rotor empieza a girar en el campo magnético estático, producido por las bobinas inductoras del motor, se induce una fuerza contraelectromotriz que se opone a la tensión externa aplicada que origina la corriente en las bobinas giratorias. Si el motor gira en vacío, la fcem reduce la corriente a un valor muy pequeño; justo lo suficiente para suministrar la energía consumida por las pérdidas de rozamientos y resistencia eléctrica. Si el motor arrastra una carga pesada tiende a disminuir su velocidad, produciéndose la consiguiente reducción en la fcem lo que permite que el motor tome más energía eléctrica para arrastrar la carga mecánica. Tomando esto como base, es fácil explicarse que al arrancar un motor haya una gran demanda de energía eléctrica. En la Sec. 10.13 se describen varios tipos de motores.

8.9 Cálculo de la inductancia mutua

Existe un caso en el que es fácil calcular la inductancia mutua entre dos circuitos en función de la autoinducción de cada uno de los circuitos aislados. Este caso es el de flujo enlazante máximo, cuando todo el flujo que atraviesa uno de los circuitos pasa también por el otro. Una configuración que realiza esto físicamente sería la de dos bobinas de igual área (pero no necesariamente del mismo número de espiras) colocadas muy próximas entre sí. Otra disposición que conduce a flujo enlazante máximo sería el de dos bobinas devanadas una sobre otra formando un solenoide toroidal. Lla-

mando a las bobinas 1 y 2 podemos escribir para la inductancia mutua la expresión

$$M = \frac{N_1\Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_2\Phi_{21}}{i_1} \tag{8.12}$$

Análogamente, la autoinducción de las bobinas vendrá dada por

$$L_1 = \frac{N_1\Phi_1}{i_1} \qquad \text{y} \qquad L_2 = \frac{N_2\Phi_2}{i_2} \tag{8.16}$$

Como todo el flujo de la bobina 2 atraviesa a la 1

$$\frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{\Phi_2}{i_2}$$

esto es, el flujo Φ_{12} en la bobina 1 debida a la corriente i_2 es el mismo que el flujo Φ_2 en la bobina 2 debido a la misma corriente i_2. Análogamente,

$$\frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\Phi_1}{i_1}$$

Si en las Ecs. (8.12) remplazamos Φ_{12}/i_2 y Φ_{21}/i_1 por estos valores y multiplicamos M_{21} por M_{12} obtenemos

$$M_{12}M_{21} = M^2 = \frac{N_1N_2\Phi_1\Phi_2}{i_1i_2} = L_1L_2$$

o sea

$$M_{\max} = \sqrt{L_1L_2} \tag{8.22}$$

Este es el valor máximo que puede tener M para valores dados de L_1 y L_2. En general, la inductancia mutua puede escribirse

$$M = k\sqrt{L_1L_2} \tag{8.23}$$

siendo k un número comprendido entre 0 y 1, que depende de la geometría de las bobinas y de su posición relativa.

8.10 Combinaciones de bobinas

Si se disponen varias bobinas en serie de modo que no haya interacción entre ellas, es decir, que no presenten inductancia mutua, es fácil demostrar que se comportan como una sola bobina cuya autoinducción sea la suma de las autoinducciones. Por tanto, la tensión inducida en las tres autoinducciones dibujadas en la Fig. 8.13 será

$$-L_1\frac{di}{dt} - L_2\frac{di}{dt} - L_3\frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

donde $L = L_1 + L_2 + L_3$. Sin embargo, la situación se modifica si

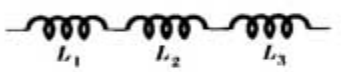


Fig. 8.13 Tres autoinducciones en serie sin interacción entre sí. Valor equivalente, $L = L_1 + L_2 + L_3$.

el flujo creado por una de las bobinas enlaza a otra, dando lugar a una inductancia mutua. En la Fig. 8.14 se supone que entre las dos bobinas existe este tipo de interacción. La tensión entre los extremos de las dos bobinas será

$$\mathcal{E} = -L_1\frac{di}{dt} - L_2\frac{di}{dt} \pm 2M\frac{di}{dt} \tag{8.24}$$

La inductancia mutua aparece dos veces, una por la tensión inducida en la segunda bobina por cambios de corriente en la primera

Fig. 8.14 Autoinducciones en serie con interacción. Valor equivalente, $L = L_1 + L_2 \pm 2M$.

y la otra por lo inverso. El doble signo $\pm$ indica la posibilidad de que la interacción mutua tenga lugar añadiéndose el flujo al propio de las autoinducciones, u oponiéndose a él. El signo de M y su valor dependen de la configuración geométrica de las bobinas. Según la Ec. (8.24), la autoinducción equivalente del par de bobina en serie valdrá:

$$L = L_1 + L_2 \pm 2M \tag{8.25}$$

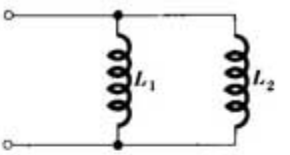


Fig. 8.15 Dos autoinducciones en paralelo.

En el caso de autoinducción en paralelo y sin interacción que indica la Fig. 8.15, podemos escribir

$$\mathcal{E}_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt}$$

Pero en este caso, $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, y será también

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = -\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\mathcal{E}$$

La autoinducción equivalente L corresponde a la expresión $\mathcal{E} = -L\, di/dt$, de modo que tenemos

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{o} \quad L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \tag{8.26}$$

Nótese que estas reglas para la combinación de autoinducciones sin interacción resultan tener la misma forma que las correspondientes a la combinación en serie y en paralelo de resistencias.

8.11 Energía magnética

Puede demostrarse que la fem inducida en un circuito como consecuencia de las variaciones del flujo magnético conduce a un consumo de energía, que se invierte en establecer un campo magnético en

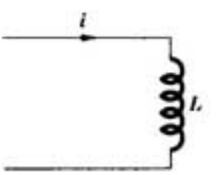


Fig. 8.16 Establecimiento de la corriente en una autoinducción.

una región del espacio. Como esta energía puede recuperarse y utilizarse, por ejemplo, en calentar una resistencia, nos vemos llevados en forma natural al concepto de energía almacenada en un campo magnético. Esta situación es análoga al almacenamiento de energía

en un campo eléctrico que vimos en el Cap. 4. Empecemos por preguntarnos cuánta energía debe invertirse en establecer una corriente i en una autoinducción L como se indica en la Fig. 8.16. La fem inducida en la bobina es

$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt}$$

La cantidad de trabajo necesaria para mover una carga dq contra esta fem será

$$dW = -\mathcal{E}dq = L\frac{di}{dt}dq = L\frac{dq}{dt}di = Li\,di \tag{8.27}$$

en la que hemos hecho un cambio de variables, haciendo aparecer $i = dq/dt$. El trabajo total, para que desde 0 la corriente alcance el valor i, se obtendrá integrando la Ec. (8.27):

$$U = \int dW = L\int_0^i i\,di = \tfrac{1}{2}Li^2 \tag{8.28}$$

Hemos llamado U a este trabajo puesto que, como demostraremos, esta energía empleada puede recuperarse.

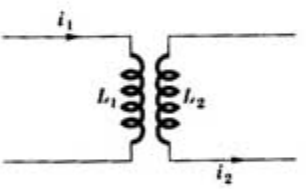


Fig. 8.17 Energía almacenada en dos circuitos acoplados.

Si consideramos el caso de dos circuitos con interacción, tal como se indica en la Fig. 8.17, la energía necesaria para establecer las corrientes i_1 e i_2 en los dos circuitos se obtendrá análogamente; si escribimos

$$\begin{aligned} dW &= -\mathcal{E}_1\,dq_1 - \mathcal{E}_2\,dq_2 \\ &= \left(L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}\right)dq_1 + \left(L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt}\right)dq_2 \\ &= L_1 i_1\,di_1 \pm M i_1\,di_2 + L_2 i_2\,di_2 \pm M i_2\,di_1 \end{aligned}$$

como $Mi_1\,di_2 + Mi_2\,di_1$ es una diferencial exacta, estos dos términos pueden escribirse como $d(Mi_1i_2)$. Integrando la expresión completa nos resulta

$$U = \tfrac{1}{2}L_1 i_1^2 + \tfrac{1}{2}L_2 i_2^2 \pm Mi_1i_2 \tag{8.29}$$

Podemos demostrar que esta energía ha quedado almacenada y no se ha perdido, consiguiendo que pueda ser invertida en calentar una resistencia. Supongamos que, mientras está circulando por un circuito la corriente i, quitamos instantáneamente la batería que produce la corriente. El circuito queda en la forma indicada por la Fig. 8.18. Es posible conseguir este cambio de forma esencialmente

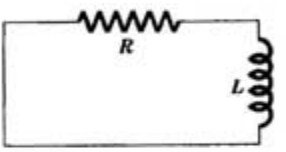


Fig. 8.18 Disipación de la energía almacenada en el campo magnético de una autoinducción.

instantánea haciendo un cortocircuito en la batería. En ausencia de autoinducción, la corriente en el circuito se anularía en el momento que se hiciera el cortocircuito en la batería. Sin embargo, la autoinducción actúa de modo que tiende a mantener constante la corriente. La ecuación para el circuito con autoinducción será

$$-L\frac{di}{dt} = iR \tag{8.30}$$

Como en ausencia de L la corriente disminuiría, es evidente que di/dt es negativo, y por la Ec. (8.30) vemos que la fem inducida actúa en el mismo sentido que lo hacía la batería. Por tanto, la autoinducción suministra la energía para forzar el paso de corriente por la resistencia. La velocidad instantánea con que se disipa la energía será

$$-Li\frac{di}{dt} = i^2R \tag{8.31}$$

que se obtiene multiplicando la Ec. (8.30) por la intensidad instantánea i. Como en este caso i y su derivada tienen signos opuestos, el primer miembro será positivo. La energía total suministrada a la resistencia es la integral de esta expresión extendida al tiempo en que tanto i como di/dt sean distintos de cero. Realmente, ya hemos encontrado su valor, que es $^1/_2Li^2$. A su vez, debe ser también igual a la integral $\int i^2R\,dt$, es decir, a la energía disipada en la resistencia una vez que la batería se quitó del circuito.

Hemos demostrado, pues, que para establecer una corriente i en una autoinducción es necesaria una cantidad de energía $^1/_2Li^2$, y que esta energía queda almacenada, quedando asociada al paso

de corriente por la autoinducción. Sin embargo, existe un punto de vista más útil: considerar que la energía está almacenada en el campo magnético existente en el espacio a causa de la corriente. Este punto de vista es exactamente análogo al mantenido en el caso de la energía almacenada en un campo electrostático, en el que vimos que era $U/\text{vol} = {}^1/_2\epsilon_0 E^2$ para el vacío. Un cálculo bastante semejante nos conducirá a la energía almacenada en un campo magnético. Elegiremos un solenoide toroidal, debido a que solo hay campo en su interior y además es esencialmente uniforme en esta región, lo que facilita mucho los cálculos. Ya sabemos que la autoinducción de este solenoide es $L = \mu_0 N^2 A/l$ henrys. Por tanto, la energía total almacenada en el campo será $U = {}^1/_2 Li^2 = {}^1/_2\mu_0 N^2 A i^2/l$ julios. La energía por unidad de volumen se obtendrá dividiendo por el volumen del solenoide, Al. Esto nos da $U/\text{vol} = {}^1/_2\mu_0 N^2 i^2/l^2$, pero como $B = \mu_0 Ni/l$, resulta finalmente

$$\frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{julios/m}^3 \tag{8.32}$$

para el caso de un campo magnético B en el vacío.

8.12 Otros aspectos de la ley de Faraday

Quedan algunos aspectos de la ley de inducción de Faraday que no hemos discutido todavía. En todo lo anterior estábamos interesados en la fem inducida a lo largo de un conductor situado en una región en la que B cambia con el tiempo. Esta fem da lugar a una fuerza sobre las partículas cargadas del conductor y, por tanto, a un campo eléctrico que puede relacionarse con la fem inducida $\mathcal{E}$ por la ecuación

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint E_{tg}\, dl \tag{8.33}$$

Si consideramos un conductor circular (Fig. 8.19) cuyo plano es

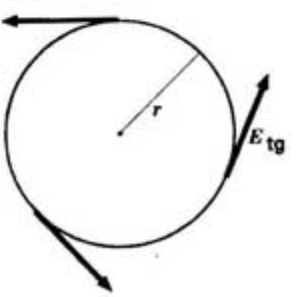


Fig. 8.19 Campo eléctrico tangencial inducido a lo largo de un hilo circular en una región en que varía el campo B.

normal a las líneas de un campo magnético B uniforme, este campo eléctrico es tangencial y uniforme para todo el circuito, estando dado por

$$E_{tg} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r} \tag{8.34}$$

siendo r el radio del conductor circular. El trabajo realizado sobre una carga q durante una revolución completa de la misma es

$$W = \oint qE_{tg}\, dl = qE_{tg}\, 2\pi r = q\mathcal{E} \quad \text{culombios} \times \text{voltios} \tag{8.35}$$

Nótese que la dirección de este campo eléctrico no está definida. La dirección de E_{tg} depende esencialmente de la trayectoria elegida, así que en realidad resulta bien distinto a un campo electrostático. Otra diferencia es que para este campo inducido, $\oint E \cdot dl \neq 0$.

Otra propiedad importante de esta fem inducida es que existe independientemente de la presencia o no de un conductor. Este hecho queda bien ilustrado por un tipo de acelerador de electrones llamado *betatrón*. En esta máquina, los electrones describen órbitas circulares en un campo magnético en el vacío. La intensidad del campo magnético cambia con el tiempo y como resultado del cambio de flujo magnético que atraviesa el área encerrada por la órbita de los electrones se induce una fem que acelera los electrones.

8.13 Aplicaciones

En el Cap. 10 discutiremos las autoindicaciones como elementos de los circuitos en corriente alterna y en transitorios. Vamos a considerar ahora dos aplicaciones de la fem inducida a problemas prácticos.

El galvanómetro balístico. El método quizá más empleado para medir la intensidad de un campo magnético constante es el de la *bobina de prueba*. En él se introduce en el campo a medir una pequeña bobina de geometría conocida de modo que sea atravesada por el máximo flujo. Entonces, la bobina se saca rápidamente del campo, o se hace girar de modo que se reduzca a cero el flujo que la atraviesa. Si pudiera integrarse la variación del flujo que tiene lugar desde el principio hasta el fin, podría obtenerse el flujo y, por tanto, B. En efecto,

$$\int \frac{d\Phi}{dt}\, dt = \Phi = BA$$

siendo Φ el valor del flujo que atravesaba originalmente la bobina. Vamos a demostrar ahora que, en condiciones apropiadas, este cambio de flujo puede relacionarse con la desviación de un galvanómetro al que se aplica la fem inducida en la bobina de prueba, $\mathcal{E} = -N\,d\Phi/dt$.

Esto puede conseguirse mediante el *galvanómetro balístico*, un galvanómetro construido de modo que su periodo de oscilación sea razonablemente largo. El galvanómetro se conecta a la bobina como se indica en la Fig. 8.20. Cuando se hace cambiar bruscamente el flujo magnético que atraviesa la bobina, el galvanómetro recibe un impulso de rotación cuya magnitud es proporcional al cambio total de flujo. Si se conocen las características del galvanómetro, puede determinarse la intensidad del campo.

Fig. 8.20 Bobina de prueba empleada con el galvanómetro balístico para medir B.

El principio de operación es el siguiente: El par que aparece sobre la bobina del galvanómetro, cuando su plano es paralelo al campo magnético, es como ya vimos

$$\tau = NiAB \tag{8.36}$$

donde las magnitudes $NiAB$ se refieren, evidentemente, a la bobina del galvanómetro, no a la de prueba. Cuando en lugar de una corriente estacionaria i, aplicamos un impulso de corriente tal como el indicado en la Fig. 8.21, el impulso de rotación comunicado a la bobina del galvanómetro es $\int \tau\,dt$, estando la integración extendida a un intervalo de tiempo suficiente para cubrir todo el tiempo en

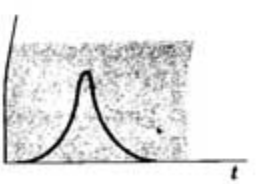


Fig. 8.21 Impulso de corriente típico a través del galvanómetro balístico. El impulso debe haber terminado antes de que tenga lugar un movimiento apreciable del galvanómetro.

que circula corriente. Empleando la Ec. (8.36), podemos integrar en la forma

$$\int \tau \, dt = NBA \int i \, dt = NBAQ \tag{8.37}$$

En la que hemos expresado el hecho de que $\int i \, dt$ es la carga total que pasa por el galvanómetro. Esta es una característica especial del galvanómetro balístico; el impulso de rotación que recibe depende únicamente de la carga total que le atraviesa y no del modo en que varía la intensidad de la corriente con el tiempo. Sin embargo, para que se trate verdaderamente de un impulso de rotación, es necesario que el impulso de corriente termine antes de que la bobina del galvanómetro haya tenido tiempo de desplazarse apreciablemente de su posición inicial. Por tanto, el impulso debe ser corto comparado con el periodo natural de oscilación del galvanómetro. Sabemos por mecánica, que este impulso de rotación comunica a la bobina un momento cinético $I\omega_0$, siendo I el momento de inercia y ω_0 la velocidad angular inicial del sistema móvil. Por tanto, tenemos

$$\int \tau \, dt = I\omega_0 = NBAQ \tag{8.38}$$

Este momento cinético inicial corresponde a una cierta energía cinética $^1/_2 I\omega_0^2$. A medida que gira la bobina en contra del par recuperador de la suspensión de la bobina del galvanómetro, esta energía cinética se convierte en energía potencial. Esta conversión es completa para la máxima desviación θ_{max} y podemos escribir

$$KE = \tfrac{1}{2} I\omega_0^2 \rightarrow PE = \tfrac{1}{2} k\theta^2{}_{max} \tag{8.39}$$

siendo k la constante elástica de la suspensión. Despejando ω_0 en la Ec. (8.38) y sustituyendo en la (8.39), encontramos

$$Q = \frac{\sqrt{Ik}}{NBA}\theta_{max} \tag{8.40}$$

Esta ecuación puede ponerse en forma más útil haciendo aparecer en ella el periodo de oscilación T de un péndulo de torsión, $T = 2\pi\sqrt{(I/k)}$. Con ello resulta,

$$Q = \frac{kT}{2\pi NAB}\theta_{max} = \frac{K'T}{2\pi}\theta_{max}$$

K' es la llamada constante del galvanómetro (véase Sec. 7.7).

Si se emplea en su lugar el índice de calidad del galvanómetro [Ec. (7.31)], resulta

$$Q = \frac{KT}{2\pi} d_{\max} \tag{8.41}$$

siendo $d_{\max}$ la desviación máxima del galvanómetro en milímetros sobre una escala situada a 1 m de distancia. Si el galvanómetro está muy amortiguado, debe introducirse una corrección para tener en cuenta el efecto del amortiguamiento sobre esta desviación.

Hemos visto que el conocimiento de la constante del galvanómetro o su índice de calidad, y del periodo de oscilación propio del galvanómetro permite medir la carga total que pasa a través suyo en un tiempo pequeño comparado con este periodo. Vamos a ver ahora cómo se hace uso de esta propiedad del galvanómetro balístico para medir el valor de B. La corriente que pasa por el circuito de la Fig. 8.20 vendrá dada por

$$i = \frac{\text{fem}}{R} = -\frac{1}{R}\left(N' \frac{d\Phi}{dt} + L\frac{di}{dt}\right) \tag{8.42}$$

Siendo L la autoinducción del circuito y N' el número de espiras de la bobina de prueba. Integrando encontramos la carga total que pasa

$$Q = \int_0^\infty i\,dt = -\frac{N'}{R}(\Phi_2 - \Phi_1) - \frac{1}{R}\int_0^0 L\,di = \frac{N'}{R}(\Phi_2 - \Phi_1) \tag{8.43}$$

en la que $(\Phi_2 - \Phi_1)$ es el cambio total de flujo habido. Si sacamos completamente la bobina de prueba del campo Φ_2 se hará cero y tendremos

$$Q = -\frac{N'}{R}\Phi_1 = \frac{N'}{R}BA' \qquad \text{o} \qquad B = \frac{QR}{N'A'} \tag{8.44}$$

donde A' es el área de la bobina de prueba. Como se ve, en este razonamiento se ha supuesto que esta bobina estaba orientada originalmente con su plano perpendicular al campo magnético.

Corrientes de Foucault y efecto pelicular. Siempre que se coloca un conductor en una región en la que existe un campo magnético variable, aparecen en él corrientes por inducción. Estas corrientes dan lugar a pérdidas i^2R en el metal al ser calentado, y estas pérdidas

de energía pueden no ser deseables. Es ésta la razón por la cual al proyectar transformadores, el núcleo de material ferromagnético empleado se construye con láminas delgadas de metal, aisladas entre sí (núcleo laminado) en vez de ser de una sola pieza. Para demostrar cómo esta división influye sobre las pérdidas, vamos a hacer un cálculo sencillo aunque aproximado. En la Fig. 8.22 se han

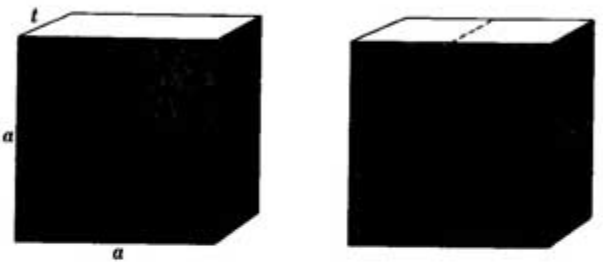


Fig. 8.22 Bloques, sólido y dividido, para estimar el valor de las corrientes de Foucault.

dibujado dos bloques metálicos que se suponen sometidos a campos variables idénticos. El primer bloque es sólido, mientras que el segundo está dividido en cuadrantes aislados entre sí. Vamos a calcular las pérdidas de Foucault en el primer bloque de espesor t y mensiones $a \times a$ y comparar con las pérdidas en los cuatro cuadrantes de área $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}$.

En la Fig. 8.23 se ve el primer bloque dividido en una serie de circuitos rectangulares de longitud l y sección transversal $t\,dx$.

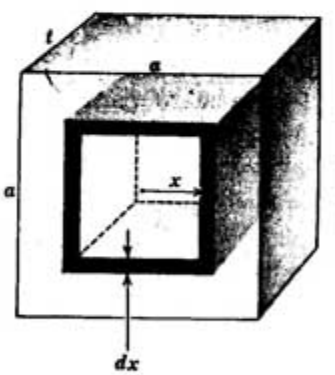


Fig. 8.23 Trayectoria idealizada de la corriente para el cálculo de las pérdidas por corrientes de Foucault.

Este no será el camino seguido exactamente por la corriente, pero constituye una primera aproximación. Como la longitud de uno de los lados es $2x$, la longitud total l es $8x$, y el área interior $(2x)^2$. Ahora bien, si B es normal a la cara frontal del bloque y su derivada dB/dt es uniforme en todo el bloque, la fem inducida es proporcional al área encerrada por cada circuito. Podremos escribir esta fem inducida $\mathcal{E}$ en la forma $k(2x)^2$, siendo

$k = dB/dt$. El campo eléctrico medio inducido E en cada rectángulo es $E = \frac{\mathcal{E}}{l} = \frac{4kx^2}{8x} = \frac{1}{2}kx$.

Vamos ahora a expresar la potencia disipada por la corriente en este circuito. Partiendo de la expresión general de la potencia disipada en un conductor, $P = Vi$, podemos transformarla como sigue:

$$P = Vi = Eli = ElAj = Ejv = \sigma E^2 v \tag{8.45}$$

siendo A = área transversal del circuito considerado.
v = volumen del mismo.
σ = conductividad.

Para el circuito que estamos considerando en el seno del bloque, podemos, pues, escribir

$$dP = \sigma E^2\, dv$$

Integrando a todo el bloque tendremos la potencia disipada en el mismo.

$$P = \sigma \int E^2\, dv = \sigma \int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{1}{2}kx\right)^2 t\, 8x\, dx = \frac{\sigma t k^2}{32} a^4$$

Este resultado nos muestra inmediatamente la ventaja de dividir el área en pequeñas zonas, puesto que el área del bloque figura elevada al cuadrado. Si el bloque se divide en cuadrantes, la expresión sería

$$P = 4\frac{\sigma t k^2}{32}\left(\frac{a}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}\frac{\sigma t k^2}{32} a^4$$

o sea la cuarta parte de la disipación en el bloque sin dividir. Como en este caso es precisamente en los planos perpendiculares a las líneas de B donde interesa interrumpir la masa conductora. Por ello los núcleos de los transformadores se construyen con muchas láminas aisladas unas de otras. El flujo magnético circula a lo largo de las láminas, sin embargo, las corrientes inducidas debidas a la $d\Phi/dt$ serán mínimas en la dirección perpendicular a las láminas debido a su pequeño espesor.

En este ejemplo simplificado hemos supuesto que la resistividad del conductor es lo bastante grande como para que las corrientes inducidas en sus diferentes partes no alteren sensiblemente el valor de dB/dt en el material. Esto es admisible en muchos casos. Sin embargo, a frecuencias elevadas las corrientes de Foucault reducen efectivamente el valor de dB/dt en el material hasta el punto de limitar la penetración de las ondas electromagnéticas en el conductor. Esto es lo que da lugar al *efecto pelicular* en los conductores. Por

ejemplo, las corrientes de alta frecuencia en un hilo, se limitan a circular por una capa superficial del hilo debido a las corrientes de Foucault, capa que se caracteriza por la llamada *profundidad de penetración*. Este efecto es también el que hace a los metales opacos a la luz, que no es sino una onda electromagnética.

PROBLEMAS

8.1 Una varilla metálica de longitud L se mueve con velocidad v en dirección perpendicular a su eje y a un campo de inducción magnética B constante, como se indica en la Fig. P 8.1*a*.

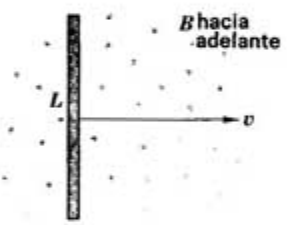


Fig. P 8.1a

a) Escribir la expresión de la fuerza sobre las cargas de la varilla como consecuencia del movimiento de la misma.
b) ¿Cuál será la magnitud y dirección del campo eléctrico debido a la separación de cargas que el movimiento origina?
c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los extremos de la varilla?
d) Si la varilla se mueve sobre un marco estacionario como se indica en la Fig. P 8.1*b*, ¿qué corriente pasará por éste si la resistencia total es R?
e) Calcular la fem inducida por el movimiento según la ley de Faraday y comparar con el resultado de (*c*).

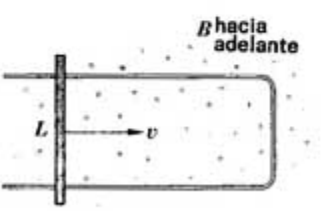


Fig. P 8.1b

8.2 Una bobina de n espiras y área A gira con frecuencia ω alrededor de uno de sus diámetros que es perpendicular a un campo magnético de inducción B. Calcular la fem máxima inducida en la bobina.

8.3 Dos bobinas idénticas están conectadas en serie y a una distancia tal que la mitad del flujo de una de ellas atraviesa también la otra. Si la autoinducción

de las bobinas es L henrys, calcular la autoinducción del par de bobinas suponiendo que las bobinas están conectadas de modo que se sumen los flujos.

8.4 Una pequeña espira de radio a es coaxial con otra gran espira de radio b, y está separada de ella por una distancia l. Suponiendo que $b >> a$, calcúlese la inducción mutua entre las espiras. (*Nota:* El problema es fácil o difícil según qué espira se escoja para considerar que produce el campo magnético.)

8.5 Una varilla conductora de longitud L gira con velocidad angular ω alrededor de uno de sus extremos en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de inducción B. Hallar la fem inducida en la varilla, primero directamente y después aplicando la ley de Faraday.

8.6 Indíquese una situación en la que la fem en una espira conductora puede calcularse por medio de la ley de inducción de Faraday, pero no por la expresión de la fem debida al movimiento.

8.7 Se da a un conductor la forma indicada en la Fig. P 8.7, siendo R el radio de la zona semicircular. Si se le hace girar en un campo magnético uniforme B con una frecuencia f, ¿cuál es la amplitud y la frecuencia de la tensión inducida, y de la intensidad que circula cuando la resistencia interna del aparato de medida es de 1000 ohms y el resto del circuito tiene resistencia despreciable?

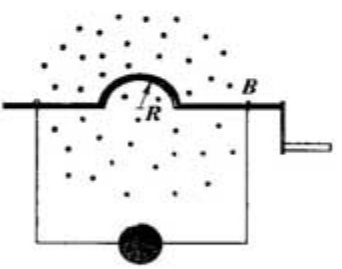
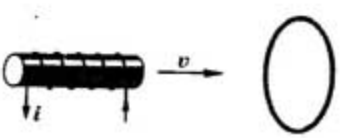


Fig P 8.7

8.8 Un gran electroimán tiene una autoinducción de 5 henrys. Si por sus devanados circula una corriente de 10 amps, ¿cuál es la energía almacenada en dicha autoinducción? Al interrumpir la corriente, se reduce a 1 amp en 1/20 de segundo. ¿Qué tensión se induce aproximadamente en la bobina? ¿Podría tener esta tensión un efecto perjudicial sobre los devanados?

8.9 Un solenoide se mueve hacia una espira conductora como se indica en la Fig. P 8.9. ¿Cuál sería el sentido de la corriente inducida en la espira, vista desde el solenoide?



8.10 La acción aceleradora en el betatrón depende de la fem inducida al variar un campo magnético. Los electrones se mueven en el vacío según circunferencias en el seno de un campo magnético que aumenta con el tiempo. El radio de curvatura de las órbitas electrónicas depende del campo B_R, en la órbita y perpendicular a su plano. La fuerza aceleradora depende de la variación $d\Phi/dt$ a través del área encerrada por la órbita.

a) Demuéstrese que para que el radio de la órbita permanezca constante mientras los electrones son acelerados, el campo medio $\overline{B}$ en el interior de la órbita debe ser $2B_R$.

b) Expresar el valor de la energía ganada por ciclo en función de dB_R/dt.

8.11 El rectángulo indicado en la Fig. P 8.11 se mueve alejándose con una velocidad V del conductor rectilíneo indefinido que lleva la corriente i. Ambos se mantienen en un mismo plano. Calcular la fem inducida en el rectángulo. ¿Cuál es la inductancia mutua entre los dos circuitos en función del tiempo si en el instante $t = 0$ la distancia del lado más próximo del rectángulo al conductor indefinido es l?

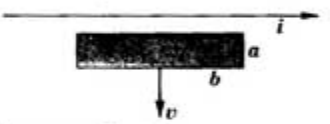


Fig. P 8.11

8.12 Se construye una espira conectando los extremos de dos hilos paralelos de radio a cuyos ejes se encuentran a una distancia d. Despreciando la influencia de las regiones extremas que se suponen muy alejadas, demostrar que la autoinducción de una longitud l de los hilos paralelos es

$$L = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \frac{d - a}{a}$$

8.13 La autoinducción de una bobina puede calcularse igualando la energía almacenada en el campo magnético de la bobina al trabajo necesario para establecer la corriente en la misma partiendo de $i = 0$. Hacer este cálculo para el caso sencillo de un solenoide toroidal de longitud l, sección transversal A y N espiras.

8.14 ¿Cómo puede conseguirse 50 voltios entre los terminales de una autoinducción de 2 henrys y resistencia despreciable?

8.15 La autoinducción de una bobina de 100 espiras muy próximas es 10 mh. Calcular el flujo magnético total a través de la bobina cuando la corriente es de 0,5 ma.

8.16 Calcular la energía magnética almacenada *en el interior* de un conductor de 1 mm de radio y 1 m de longitud por el que circula una corriente de 10 amp. La densidad de corriente es uniforme.

8.17 En una bobina de 200 espiras muy próximas una corriente de 10 amp produce un flujo total de 10 weber. Calcular la energía almacenada en el campo magnético.

8.18 Entre las piezas polares de sección cuadrada de un imán existe un entrehierro muy pequeño en el que el campo magnético B es horizontal como se indica en la Fig. P 8.18. Una espira rectangular cuyos lados tienen una longitud l se deja caer de modo que su parte superior permanece dentro del campo. La espira tiene una resistencia total R y un peso mg. Calcular la velocidad límite de la espira mientras está entre los polos del imán. ¿Cómo se modificaría esta velocidad si la sección transversal del conductor que forma la espira se hiciera el doble?

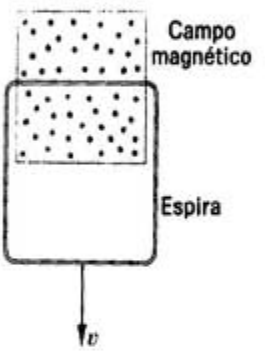


Fig. P 8.18

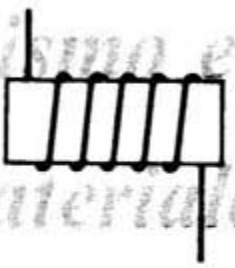
8.19 Un campo magnético uniforme B cambia su intensidad con velocidad constante dB/dt. Con una masa dada de cobre m se forma un hilo de radio r y con él una espira circular de radio R. Demostrar que la corriente inducida en la espira no depende del tamaño del hilo o la espira y viene dada por

$$i = \frac{m}{4\pi\rho\delta}\frac{dB}{dt}$$

siendo ρ la resistividad y δ la densidad del cobre.

NUEVE

El Magnetismo en los Medios Materiales



9.1 Introducción

En este capítulo veremos las modificaciones que deben introducirse en la descripción del magnetismo con objeto de tener en cuenta los fenómenos magnéticos en los medios materiales. Después de una breve discusión preliminar sobre el origen del comportamiento magnético de la materia, deduciremos algunas relaciones generales entre los parámetros magnéticos más usuales. A continuación, discutiremos con mayor detalle las contribuciones atómicas al magnetismo, que dan cuenta de los tres tipos más importantes de comportamiento magnético: *paramagnetismo*, *diamagnetismo* y *ferromagnetismo*. Posteriormente, estudiaremos algunos de los problemas referentes a la *magnetización* de un cuerpo situado en un campo magnético uniforme y discutiremos brevemente los diferentes modos de considerar los cuerpos magnetizados en forma permanente. Finalmente, describiremos brevemente los *circuitos magnéticos*, de especial importancia en la construcción de electroimanes.

9.2 Contribución de la materia al magnetismo

Para comenzar esta discusión vamos a referirnos a un dispositivo experimental muy sencillo que puede emplearse para medir la contribución de la materia al magnetismo. En la Fig. 9.1 se muestra este

Fig. 9.1 Solenoide toroidal con un devanado secundario para la medida del flujo.

dispositivo, constituido por un solenoide toroidal con un devanado adicional o secundario que puede conectarse a un galvanómetro balístico. Cuando el espacio interior del solenoide está vacío, puede emplearse el galvanómetro balístico para medir el flujo total $\int \mathbf{B}\cdot d\mathbf{A}$ que atraviesa la bobina cuando pasa una corriente i, determinando la desviación del galvanómetro cuando se interrumpe bruscamente la corriente. Cuando se repite el experimento llenando el interior del solenoide con una sustancia determinada, en general, se obtiene una desviación diferente del galvanómetro para la misma corriente. Esta contribución adicional al flujo total es la que vamos a describir.

En el vacío la inducción magnética en el solenoide está dada por

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{L} = \mu_0 j \qquad \text{weberios/m}^2 \tag{6.10}$$

siendo j la densidad de corriente solenoidal definida en la Sec. 6.3. Este valor de **B** se obtuvo integrando

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i\, d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{6.2}$$

para la geometría del solenoide, o bien, aplicando la ley de Ampere,

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

al camino medio del solenoide toroidal.

Los experimentos con el solenoide relleno de alguna sustancia demuestran que, en general, **B** resulta modificado por la presencia de la misma. Con una sustancia en el solenoide debemos añadir un nuevo término al flujo $\Phi = BA$. Este término extra hace aumentar **B** (en algunos casos, lo hace disminuir). Por tanto, escribiremos la Ec. (6.1) en la forma

$$B = \mu_0(j_v + j_{mag}) \tag{9.1}$$

donde $j_v = Ni/L$ es la densidad de corriente solenoidal en la bobina y j_{mag} representa una densidad de corriente solenoidal *equivalente* que describe la contribución de la materia al campo magnético.

Es posible demostrar que, si la materia magnetizada está constituida por un cierto número de dipolos magnéticos alineados en la dirección del campo magnético externo, estos dipolos magnéticos darían lugar a un campo magnético del mismo tipo del que se obtendría con esta densidad de corriente solenoidal equivalente. Demostraremos esta relación después de describir cualitativamente la estructura de los materiales magnéticos.

Los fenómenos magnéticos en las sustancias magnéticas son debidos a la existencia de dipolos magnéticos atómicos en el material. Estos dipolos magnéticos son el resultado: del movimiento de los electrones en las órbitas atómicas, que equivalen a una espira; del «spin» electrónico (momento magnético intrínseco del electrón, que puede describirse como un movimiento de giro equivalente del electrón sobre sí mismo), y de los momentos magnéticos de los núcleos atómicos. El efecto del campo exterior es una tendencia a alinear los dipolos magnéticos según su misma dirección. Podemos caracterizar el grado de alineación por el momento magnético total por unidad de volumen del material, siendo este momento magnético total la suma vectorial de los momentos individuales. Esta magnitud se denomina magnetización **M** del material, y juega en magnetismo un papel equivalente al de la polarización **P** en los dieléctricos.

Con el fin de demostrar la conexión entre **M** y la densidad de corriente solenoidal equivalente j_{mag}, vamos a considerar un pequeño cubo (véase Fig. 9.2) que contiene un cierto número de dipolos magnéticos atómicos alineados en la dirección del campo magnético exterior. Como no todos los dipolos existentes estarán dirigidos en la dirección del campo, es más correcto decir que los que lo estén representan la magnetización *neta* del material. Como hemos visto, el momento magnético es una magnitud vectorial y el campo de cada dipolo estará dado por la Ec. (6.24). Vamos a calcular el campo de inducción magnética en puntos muy alejados del cubo tales como el S. Podemos razonar que el campo en S podría estar, igualmente bien, producido por una corriente i_{mag} que circulara por

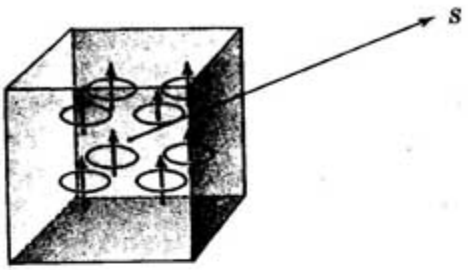


Fig. 9.2 Dipolos alineados que representan la magnetización de un pequeño cubo. Estos dipolos dan lugar a un campo magnético en los puntos exteriores tales como el S.

las caras laterales del cubo, como se indica en la Fig. 9.3. Esta corriente actuaría como un dipolo, exactamente como lo hacen los dipolos magnético-atómicos individuales; por tanto, en un punto S alejado del cubo, el campo sería el mismo; bien como consecuencia de la existencia de dipolos atómicos individuales, bien por la existencia también de la corriente que rodeará al cubo. El momento magnético del cubo es, por tanto,

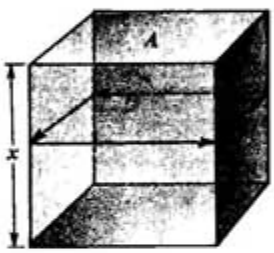


Fig. 9.3 El efecto de los dipolos magnéticos en los puntos exteriores puede simularse mediante una corriente equivalente i_{mag} que circule alrededor de cada elemento de volumen.

$$p_m = i_{mag}A$$

siendo A el área de la espira. Calculemos ahora la magnetización M, o momento magnético por unidad de volumen del cubo, será

$$M = \frac{i_{mag}A}{xA} = \frac{i_{mag}}{x} = j^s_{mag} \qquad \text{amperios/m} \tag{9.2}$$

donde j^s_{mag} es la densidad de corriente solenoidal equivalente que circule alrededor del cubo. El momento magnético de esta corriente es igual a la suma de los momentos magnéticos de los dipolos atómicos individuales.

Vamos ahora a extender este razonamiento a un cilindro de material magnético. Para evitar la influencia de los extremos, consideraremos un toroide introducido en el interior del solenoide toroidal de la Fig. 9.1. Examinemos una rodaja de este toroide, tal como la que se muestra en la Fig. 9.4, y consideremos que esta rodaja está constituida por muchos cubos idénticos al descrito anteriormente. Como en aquella ocasión, sustituiremos los efectos magnéticos de los dipolos individuales en cada cubo, por una corriente solenoidal que circule con densidad j^s_{mag}. Los efectos de todas las corrientes

circulantes se compensan en el interior del material, ya que las corrientes correspondientes a las superficies de dos cubos vecinos son iguales y opuestas. Solamente restan las corrientes circulantes alrededor de la superficie exterior de la rodaja. El momento magnético por unidad de volumen en el material es el de los cubos individuales, es decir, $M = \vec{j}_{mag}$. Pero ahora podemos considerar $\vec{j}_{mag}$ como una densidad de corriente equivalente que circula por la superficie exterior del material. Esta es la llamada *corriente superficial de Ampere*, que puede emplearse para describir los efectos magnéticos de los dipolos magnéticos atómicos reales. Al igual que el campo mag-

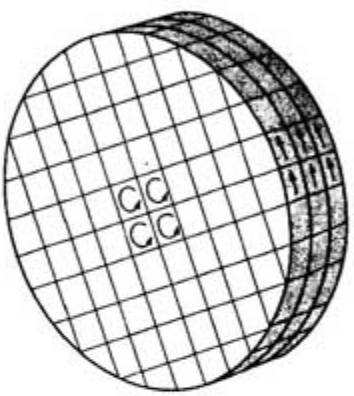


Fig. 9.4 Las corrientes circulatorias que dan cuenta de las propiedades magnéticas de la materia pueden remplazarse por una densidad de corriente solenoidal equivalente que se denomina corriente superficial de Ampere.

nético en el interior de un solenoide toroidal es de intensidad constante, las corrientes de Ampere dan lugar a un campo magnético uniforme en su interior. Este campo uniforme corresponde al valor *medio* del campo en el interior del material magnético. Las corrientes de Ampere en los materiales magnéticos corresponden a las cargas superficiales inducidas en los materiales dieléctricos. De este modo, hemos remplazado las corrientes atómicas que producen los fenómenos magnéticos en la materia, por una corriente superficial ficticia que es mucho más fácil de manejar matemáticamente.

La configuración geométrica que hemos escogido para esta discusión es muy especial. En efecto, el solenoide toroidal es un cilindro alargado sin extremos. Si hubiéramos colocado una muestra más pequeña de la sustancia con límites finitos dentro de la bobina, el problema hubiera resultado mucho más complicado, puesto que, para satisfacer las condiciones en las superficies límite de la muestra, el campo original en el vacío hubiera quedado seriamente modificado. Demostraremos en la Sec. 9.12 que siempre que la magnetización **M** en un medio tiene una componente perpendicular a la superficie del mismo, el campo original en el exterior del medio queda modificado por su presencia. En nuestro caso especial, la contribución de la materia es un campo que solo existe en su interior, y que

es, en todos sus puntos, paralelo al campo original en el vacío del solenoide. El problema general de calcular el campo en el interior de una muestra material de forma cualquiera es más difícil, y únicamente estudiaremos más adelante algunos casos sencillos.

Si la magnetización del medio no es uniforme aparece una complicación adicional, las corrientes individuales no se compensan completamente y debemos añadir a la densidad de corriente superficial un término que represente una distribución de volumen de corrientes. De momento, continuaremos considerando el caso mucho más sencillo de una muestra toroidal uniformemente magnetizada.

En secciones posteriores veremos que ciertos tipos de dipolos tienden a ser alineados por término medio en la dirección del campo (paramagnetismo), mientras que existen casos en los que se inducen dipolos alineados contra el campo (diamagnetismo).

9.3 Intensidad del campo magnético H

En la Ec. (9.1) hemos visto que la inducción magnética en la muestra tiene dos orígenes, uno la corriente en la bobina—una influencia exterior—y el otro la magnetización de la muestra, que vimos que puede calcularse a partir de una densidad de corriente equivalente. El término que depende de los efectos exteriores es de considerable importancia, y le denominaremos intensidad del campo magnético **H**. En el caso del solenoide

$$H = \frac{Ni}{L} = j_v^* \qquad \text{amperios/m} \tag{9.3}$$

Si el solenoide está vacío, no hay contribución de magnetización alguna, y será

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{9.4}$$

esto es, **B** y **H** difieren únicamente en un factor constante μ_0. **H** representa un campo vectorial bastante similar al campo de inducción **B**, pero que difiere de él en que ignora los efectos de la materia, del mismo modo que **D** en electrostática es independiente de la presencia de un dieléctrico. Más adelante, en la Sec. 9.12, veremos que para muestras no toroidales, **H** resulta afectada por las superficies límite de los medios magnéticos. Por tanto, nuestra definición actual de **H**, $= Ni/L$ es incompleta. La importancia del campo **H** reside en parte en que resulta conveniente para resolver problemas en los que aparecen superficies límite. Igualmente importante es el hecho de que la magnetización inducida en la materia depende del valor de **H**. Frecuentemente, la magnetización inducida **M** es *proporcional* a **H**, y en tal caso podemos describir las propiedades del material

por medio de su *susceptibilidad magnética* χ_m o su *permeabilidad magnética* μ. En la próxima sección definiremos estos términos.

9.4 Parámetros magnéticos de la materia

Podemos ahora volver a escribir, para el caso especial de una muestra toroidal, la Ec. (9.1) en la forma

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{9.5}$$

En ella, el primer término es la contribución de la corriente en el solenoide, y el segundo, debido a la magnetización de la muestra, es el que puede ser representado por la corriente solenoidal equivalente. En general, esta ecuación es válida, pero para muestras de forma distinta a la toroidal, el cálculo de **H** resulta mucho más complicado. Discutiremos este problema en la Sec. 9.12.

Para las numerosas sustancias en las que la magnetización es proporcional a **H**, podemos definir la susceptibilidad magnética del medio, χ_m, mediante

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{9.6}$$

Así definida, χ_m es un número puro, puesto que **M** y **H** tienen las mismas unidades. Se deduce, pues, de la Ec. (9.5) que

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}. \tag{9.7}$$

Y si escribimos

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \tag{9.8}$$

siendo μ la permeabilidad magnética, resulta

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \quad \text{o} \quad B = \mu j_v^* \tag{9.9}$$

Resulta útil definir también la *permeabilidad relativa* μ/μ_0. Esta permeabilidad relativa tiene en el sistema mks el mismo valor numérico que la permeabilidad en el sistema electromagnético cgs.

Podemos, por tanto, clasificar las sustancias magnéticas de acuerdo con su susceptibilidad χ_m. En las sustancias paramagnéticas, χ_m es positiva y mucho menor que 1. En las sustancias diamagnéticas, χ_m es negativa y también pequeña comparada con 1. Los materiales ferromagnéticos se caracterizan porque χ_m es positiva y muy grande. Sin embargo, en las sustancias ferromagnéticas **M** no es exactamente proporcional a **H**, de modo que χ_m no es una cons-

tante, salvo en un pequeño intervalo de valores de **H**. Más adelante discutiremos estos tres casos con mayor detalle.

También podemos clasificar los materiales magnéticos haciendo uso de la permeabilidad magnética μ. Según su definición, resultará para las distintas sustancias:

Diamagnéticas: $\mu < \mu_0$

Paramagnéticas: $\mu > \mu_0$

Ferromagnéticas: $\mu >> \mu_0$

9.5 Características de los campos B y H

Volvamos a nuestras anteriores consideraciones sobre los dos campos vectoriales magnéticos: **B**, la inducción magnética, y **H**, la intensidad magnética. En las Secs. 6.2 y 6.4, habíamos encontrado anteriormente que en el vacío las líneas de **B** son continuas y cerradas sobre sí mismas. Esto continuará siendo cierto en presencia de medios materiales, puesto que como hemos visto los efectos magnéticos de una sustancia uniformemente magnetizada, pueden ser simulados mediante una densidad de corriente equivalente que circule alrededor de la muestra magnética. Por tanto, podemos imaginar sustituida la materia por bobinas de forma adecuada, y recorridas por la corriente apropiada, y con ello encontrarnos de nuevo en el caso del vacío. Así, pues, en todos los casos la integral de superficie de **B** extendida a una superficie que encierre completamente un cierto volumen es cero; aun en presencia de materia, tenemos

$$\int_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{9.10}$$

Esto es, el número de líneas de fuerza que salen de una superficie cerrada S es el mismo que el número de líneas que entran en ella (puesto que todas las líneas son continuas y no tienen ni principio ni fin). Esto no es sino el teorema de Gauss aplicado a **B**, y es exactamente lo mismo que se obtenía en electrostática para **E** en una región en la que no existan cargas que puedan actuar como fuentes o sumideros de las líneas de **E**. Para **B**, sin embargo, en ningún caso hay fuentes o sumideros.

Otra propiedad de las líneas de **B** se refiere a la integral curvilínea extendida a una trayectoria cerrada. En la Sec. 6.4 demostramos que

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \tag{6.14}$$

siendo i la corriente que atravesaba la trayectoria cerrada escogida. Ahora que estamos incluyendo los efectos de los medios magnéticos, deberemos reescribir esta expresión en la forma

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0(i_v + i_{mag}) = \mu_0 i_{\text{total}} \tag{9.11}$$

siendo i_v la corriente real, e i_{mag} la corriente ficticia de Ampere que describe el comportamiento magnético del medio.

Esta última ecuación puede convertirse en otra más útil si hacemos aparecer la integral curvilínea de **H**. Para conseguirlo emplearemos en primer lugar la relación general (9.3), $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, para expresar **B** en función de **H** y **M**. Haciendo esta sustitución, tenemos

$$\frac{1}{\mu_0}\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{M}\cdot d\mathbf{l} = i_{\text{total}} \tag{9.12}$$

Si ahora podemos calcular el término que contiene **M**, despejaremos $\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}$. Pero como ya sabemos que $\mathbf{M} = \vec{j}_{mag}$, vemos inmediatamente que $\oint \mathbf{M}\cdot d\mathbf{l} = i_{mag}$.

Vamos a aclarar este punto con ayuda de la Fig. 9.5. En ella se ha dibujado una sección de la muestra toroidal, sobre la que se ha

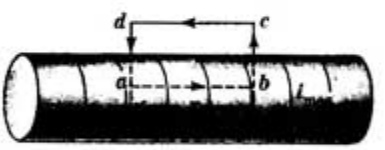


Fig. 9.5 Cálculo de la integral curvilínea de la magnetización en una trayectoria cerrada.

indicado la corriente de Ampere superficial. Esta corriente remplaza el efecto de los dipolos magnéticos orientados existentes en la muestra. La magnetización es producida por la corriente verdadera que circula por la bobina toroidal que rodea la muestra y no se ha indicado en la figura. Calculemos el valor de la integral curvilínea $\oint \mathbf{M}\cdot d\mathbf{l}$ a lo largo de la trayectoria cerrada *abcd*. A lo largo de *ab*, M es paralela a la trayectoria e igual a $\vec{j}_{mag}$. Si llamamos x a la distancia *ab*, la integral de *a* a *b* vale $\vec{j}_{mag}x$. La integral vale cero en el resto de la trayectoria, puesto que M es perpendicular a *bc* y *da*, y es cero a lo largo de *cd*. Como $\vec{j}_{mag}x$ es la corriente de Ampere total i_{mag} que atraviesa la trayectoria, tenemos

$$\oint \mathbf{M}\cdot d\mathbf{l} = i_{mag}$$

Si sustituimos este resultado en la Ec. (9.12), teniendo en cuenta que $i_{total} = i_v + i_{mag}$, encontramos

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_v \tag{9.13}$$

que es una propiedad fundamental de **H**, y es la análoga de la Ec. (6.15), $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$, que obtuvimos en el caso del vacío. Las Ecs. (9.10) y (9.13) son respectivamente las que expresan propiedades básicas de **B** y **H**, siendo válidas en todas condiciones.

En cualquier región del espacio en la que no existan conductores que lleven corrientes (y no haya cargas en movimiento), i_v es cero, y la Ec. (9.13) se reduce a

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0 \tag{9.14}$$

9.6 Condiciones en los límites para B y H

Vamos a emplear ahora estas relaciones generales para demostrar cómo se comportan **B** y **H** en la superficie límite entre dos materiales magnéticos. El procedimiento que seguiremos recordará al empleado para obtener las condiciones para **E** y **D** en la superficie entre dos dieléctricos, puesto que las bases matemáticas son idénticas.

En el caso de **B**, comencemos por imaginar una superficie gaussiana cilíndrica, como se indica en la Fig. 9.6, dibujada de modo

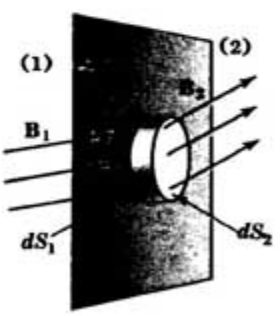


Fig. 9.6 Superficie de Gauss para obtener las condiciones que debe cumplir B en la superficie límite entre dos medios magnéticos diferentes.

que tenga una de sus bases en la región 1 y la otra en la región 2. Las dos regiones tienen propiedades magnéticas diferentes; por ejemplo, la región 1 puede ser el vacío, cuando la región 2 sea un material magnético. Haremos tender a cero la altura del cilindro, de modo que las líneas de **B** que salen por las caras laterales del

cilindro pueden despreciarse. Entonces, según la Ec. (9.10), podemos escribir:

$$\int_{S_1} \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = -\int_{S_2} \mathbf{B}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 \tag{9.15}$$

Esto significa que las componentes normales de $\mathbf{B}_1$ y $\mathbf{B}_2$ son iguales, o sea

$$B_{n1} = B_{n2} \tag{9.16}$$

Estudiemos a continuación el comportamiento de **H** en esta superficie límite tomando la integral curvilínea en la forma indicada en la Fig. 9.7. Si admitimos que el material magnético no está rodea-

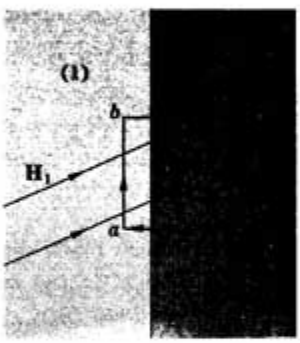


Fig. 9.7 Trayectoria de integración para obtener las condiciones que debe cumplir H en la superficie límite entre dos medios magnéticos diferentes.

do por ninguna bobina por la que pase corriente, podremos emplear la Ec. (9.14) para demostrar que

$$\int_a^b \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 = -\int_c^d \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 \tag{9.17}$$

Esto significa que las componentes tangenciales de **H** son iguales en los dos lados de la superficie, es decir,

$$H_{t1} = H_{t2} \tag{9.18}$$

Hasta aquí no hemos hecho hipótesis alguna sobre cómo están relacionados **B** y **H**. Si estamos manejando materiales en los que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, podemos determinar el comportamiento de **B** y **H** en la superficie límite como acabamos de indicar. Como estas condiciones son las mismas que encontramos para **D** y **E** en el caso de dos dieléctricos, tomando directamente los resultados allí obtenidos, escribiremos

$$\frac{\text{tg } \Phi_1}{\text{tg } \Phi_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \tag{9.19}$$

para determinar las direcciones de **B** y **H** en los dos lados de la superficie (véase la Sec. 5.6 para el caso electrostático).

9.7 Energía almacenada en los medios magnetizados

En la Sec. 8.11 hemos encontrado ya que la densidad de energía en una región del vacío en la que existe un campo de inducción magnética **B** es

$$\frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \qquad \text{julios/m}^3 \tag{8.32}$$

Argumentos idénticos, empleando el solenoide toroidal que contiene un medio magnético, nos van a permitir el cálculo de la densidad de energía en los medios magnetizados. Necesitamos únicamente remplazar la ecuación correspondiente al vacío

$$B = \mu_0 j_v^a \tag{6.12}$$

por

$$B = \mu j_v^a \tag{9.20}$$

para obtener el resultado deseado. Se deja como problema para el lector el demostrar por este camino que la densidad de energía en el medio viene dada por

$$\frac{U}{\text{vol}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2 \tag{9.21}$$

En la Sec. 5.8 vimos cómo la energía almacenada en el campo eléctrico, podía emplearse para calcular las fuerzas que aparecen sobre una lámina dieléctrica situada entre las placas de un condensador. En el caso de los materiales magnéticos existen problemas semejantes. En el caso dieléctrico, si el sistema está aislado, el trabajo mecánico realizado por el campo eléctrico al desplazar el dieléctrico es obtenido a costa de la energía electrostática almacenada. Sin embargo, en el problema que vimos, entre las placas del condensador se conectaba una batería para mantener constante la tensión aplicada. Demostrábamos que el trabajo suministrado por la batería durante un desplazamiento del dieléctrico era el doble del trabajo mecánico realizado por las fuerzas eléctricas. Como resultado, en lugar de hallar una *disminución* de la energía almacenada en la cantidad $-dU$, encontrábamos un *aumento*, de valor $-dU + 2\,dU = dU$. La relación entre trabajo y energía resultaba ser $F\,dx = dU$ en lugar de $F\,dx = -dU$, representando $F\,dx$ un trabajo positivo realizado por el campo. Este resultado es válido para cualquier sistema lineal (para el cual la susceptibilidad es constante).

En el caso de un sistema magnético, tal como los de las Figs. P 9.2 y P 9.9, se presentan los mismos efectos. El movimiento del material magnetizado determina que realice trabajo la fuente exterior que ha suministrado la energía almacenada en el campo magnético, y para sistemas lineales el trabajo realizado por la fuente externa de energía es el doble de la pérdida de energía magnética almacenada; por tanto, en los problemas citados deberá tomarse $F\,dx = dU$.

9.8 Paramagnetismo

La característica esencial de los materiales paramagnéticos es que presentan una susceptibilidad magnética positiva, pero pequeña ($\chi_m << 1$), que proviene de la existencia de dipolos magnéticos permanentes que son capaces de orientarse bajo la influencia de un campo externo. Los dipolos se ejercen mutuamente fuerzas muy pequeñas; por tanto, a las temperaturas ordinarias, las vibraciones térmicas en el sólido aseguran una orientación al azar de los dipolos, con lo que la magnetización media es cero. Cuanto mayor es el campo magnético aplicado, los dipolos tienden a ser alineados más exactamente, y mayor es el momento magnético neto por unidad de volumen, o sea la magnetización **M**.

Analicemos la susceptibilidad magnética de una sustancia paramagnética, considerando que existen N átomos por unidad de volumen, cada uno de los cuales presenta un momento magnético dipolar p_m, que puede ser orientado por el campo aplicado. Supongamos, como es frecuentemente el caso, que al aplicar el campo, existen únicamente dos posibilidades de orientación—o los dipolos están alineados paralelamente al campo o están alineados antiparalelamente—.[1] La magnetización, a una temperatura y un campo magnético dados, depende del número de dipolos magnéticos alineados paralelamente al campo en exceso sobre el número de los que están alineados antiparalelamente. Este exceso de dipolos alineados paralelamente viene dado por una fracción del total

$$f = \frac{p_m B}{3kT} \tag{9.22}$$

donde k es la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta. Sin demostrar este resultado, haremos notar que el numerador está relacionado con la energía de orientación de los dipolos en el campo

[1] Uno de los resultados de la mecánica cuántica es que los dipolos magnéticos en un campo están sometidos a la restricción de que solo pueden adoptar ciertas posiciones medias bien determinadas con respecto a la dirección del campo (véase Sec. 14.7). Si estuvieran permitidas todas las orientaciones se obtendría el mismo resultado salvo un factor numérico.

externo, y que el denominador está relacionado con la energía térmica de la sustancia. Así, cuanto mayor sea la temperatura las vibraciones térmicas dificultan en mayor grado la orientación y más pequeña es la fracción en exceso de dipolos alineados paralelamente.

A partir de esta última ecuación la susceptibilidad se obtiene como sigue. La magnetización valdrá:[1]

$$M = Np_m f = \frac{Np_m^2 \mu_0 H}{3kT}$$

Por tanto,

$$\chi = \frac{M}{H} = \frac{N\mu_0 p_m^2}{3kT} \tag{9.23}$$

Esta forma de dependencia de la susceptibilidad de las sustancias paramagnéticas con T^{-1} es conocida como ley de Curie.

En la Fig. 9.8*a* se presenta gráficamente la variación de la magnetización M con el campo magnetizante H. La pendiente de esta curva es la susceptibilidad χ_m. La gráfica de χ_m frente a T en la Fig. 9.8*b* muestra cómo disminuye la susceptibilidad al aumentar la temperatura, de acuerdo con la Ec. (9.23). En la práctica, se suele representar el valor recíproco $1/\chi_m$ frente a la temperatura, con lo que se obtiene una línea recta, como se indica en la Fig. 9.8*c*.

Vamos ahora a investigar la naturaleza de p_m, el momento dipolar atómico. Comenzando por considerar átomos o iones libres, evitaremos el empleo de la mecánica cuántica aceptando algunos hechos sencillos sobre la estructura atómica que resultan de su naturaleza mecano-cuántica. Consideraciones puramente clásicas nos darán entonces la respuesta a nuestras preguntas. Así, pues, partiremos de un modelo atómico en el que los electrones giran en órbita alrededor de un núcleo mucho más pesado. Estos electrones actúan como pequeñas corrientes circulares y, por tanto, presentan momentos magnéticos $p_m = Ai$, siendo A el área de la órbita. Empecemos por calcular p_m para una órbita simple, tal como la de un solo electrón girando alrededor del núcleo en un átomo libre.

El área de una órbita circular es $A = \pi r^2$, y la intensidad de la corriente debida a un electrón de carga e es el número de veces que el electrón pasa por cualquier punto de la órbita por segundo multiplicado por e, es decir, $i = ef = ev/2\pi r$, siendo f la frecuencia de giro del electrón y v su velocidad. Determinaremos v en forma clásica, en función del radio de la órbita, igualando la fuerza de Cou-

[1] En este caso se ha sustituido el campo magnético B por $\mu_0 H$. Esto equivale a despreciar el efecto de M en la ecuación $B = \mu_0(H + M)$, lo cual está justificado dado el pequeño valor de M en las sustancias paramagnéticas.

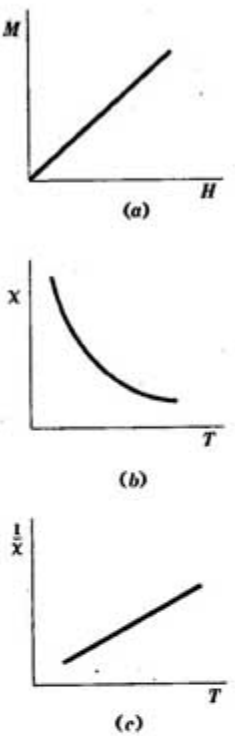


Fig. 9.8 Susceptibilidad paramagnética. (a) La pendiente de la curva de la magnetización M en función del campo aplicado H da la susceptibilidad $\chi = M/H$. (b) La susceptibilidad χ como función de la temperatura. (c) $1/\chi$ en función de T representa una línea recta.

lomb entre el electrón y el núcleo de carga Ze a la fuerza centrípeta que mantiene el electrón en órbita. Por tanto, escribiremos

$$ma = \frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} \tag{9.24}$$

para obtener

$$v = e\left(\frac{Z}{4\pi\epsilon_0 mr}\right)^{1/2}$$

Sustituyendo resulta para el momento,

$$p_m = Ai = \frac{e^2}{2}\left(\frac{Zr}{4\pi\epsilon_0 m}\right)^{1/2} \tag{9.25}$$

Si el radio atómico es de 10^{-10} m, resulta $p_m \sim 10^{-23}$ amp-m^2. La mayor parte de los electrones que giran alrededor del núcleo no tienen contribución al momento magnético permanente. Esto es consecuencia de la tendencia de los electrones a aparearse de tal modo que dan lugar a momentos iguales y opuestos que se compen-

san. Desde el punto de vista clásico esto correspondería a dos electrones que giraran en sentidos opuestos en la misma órbita. Sin embargo, en muchos átomos e iones existe uno (o más) electrones cuyo momento no queda anulado por el de otro.

Otra fuente de momento magnético, además de la contribución del movimiento orbital que acabamos de describir, es el spin del electrón. En efecto, el electrón se comporta como si estuviera girando alrededor de sí mismo. Esto equivale también a una corriente cerrada y, por consiguiente, a un momento magnético. En los átomos e iones es también cierto que los electrones tienen una fuerte tendencia a aparearse disponiéndose de modo que sus spines son opuestos, compensándose como consecuencia sus momentos magnéticos. Sin embargo, todos los átomos e iones que tienen un número impar de electrones, así como en otros casos de compensación incompleta, presentarán magnetismo de spin. El momento magnético debido al spin electrónico es del mismo orden de magnitud que el debido a su movimiento orbital.

En los sólidos el momento magnético debido al spin del electrón es el principal origen de las propiedades magnéticas. Esto resulta del efecto que los campos eléctricos locales que existen en los sólidos tienen sobre el movimiento orbital de los electrones. Estos campos tienden a que el plano de la órbita realice una precesión rápida de modo que el valor medio del momento magnético en cualquier dirección es cero. Por tanto, normalmente el valor del momento magnético de un átomo o ion libres no corresponde al valor en los sólidos o líquidos.

Una contribución adicional, aunque mucho más pequeña, a la magnetización de los medios materiales procede del hecho de que algunos núcleos tienen momento magnético. Puede pensarse que esto es debido al movimiento de cargas en el interior del núcleo. La magnitud de los momentos nucleares es unas 10^{-3} veces la de los momentos electrónicos.

Sustituyendo valores en la Ec. (9.23), encontramos que los materiales paramagnéticos a la temperatura ambiente tienen como máximo susceptibilidades del orden de 10^{-3}. Por tanto, los efectos magnéticos en estos materiales son muy débiles, y el valor de μ difiere de μ_0 en menos del 1 por 100. Aun así, es posible medir estos efectos con considerable precisión. Un método es emplear el dispositivo indicado en la Fig. 9.1, aunque puede obtenerse un resultado más preciso midiendo la fuerza que aparece en un campo magnético no-uniforme sobre una muestra paramagnética.

9.9 Diamagnetismo

El diamagnetismo resulta de los momentos magnéticos negativos inducidos en todas las sustancias por aplicación de un campo magnético externo. Está caracterizado por una susceptibilidad *negativa* y porque es independiente de la temperatura. Como es pequeño comparado con la magnetización paramagnética (y ferromagnética), puede observarse de modo directo únicamente en las sustancias que no presentan estos otros efectos. Esta susceptibilidad negativa puede interpretarse sobre la base de la inducción de Faraday que tiene lugar en el movimiento orbital de los electrones en los átomos e iones.

Podemos entender este efecto y su signo negativo razonando sobre un electrón en una órbita circular, tal como se indica en la Fig. 9.9,

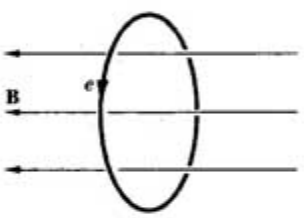


Fig. 9.9 Efecto de un campo externo sobre la órbita de un electrón.

y preguntándonos qué ocurre si se aplica un campo **B** perpendicular al plano de la órbita. De acuerdo con la ley de Faraday, existirá sobre el electrón una fem dada por

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -A\frac{dB}{dt}$$

durante el tiempo que el campo está variando, siendo A el área de la órbita. Esta fem tiene por efecto el modificar el movimiento de circulación de los electrones en sus órbitas atómicas. Veremos más adelante que si los campos magnéticos provocan solo un cambio razonablemente pequeño en el movimiento circular, el tamaño de la órbita no se altera. Por tanto, en el presente cálculo admitiremos que el radio orbital es constante. La fem producida por el campo **B** variable da lugar a un campo eléctrico E_t, que actúa tangencialmente a la dirección de movimiento del electrón. La intensidad de este campo es

$$E_t = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

Como consecuencia de este campo, el electrón será acelerado según la ley de Newton, resultando

$$m\frac{dv}{dt} = eE_t = \frac{e\mathcal{E}}{2\pi r} = -\frac{e}{2\pi r}\frac{d\Phi}{dt} \tag{9.26}$$

Para hallar el cambio total de velocidad que tiene lugar mientras el flujo magnético está aumentando, integraremos ambos miembros de la Ec. (9.26), obteniendo

$$\Delta v = -\frac{e}{2\pi r m}\Phi$$

siendo Φ el flujo magnético final a través de la órbita y Δv el *cambio* total de velocidad debido a la fuerza inducida. Si lo expresamos como un cambio en velocidad angular mediante la relación $\Delta v = r\omega_L$, tendremos

$$\omega_L = -\frac{e}{2\pi r^2 m}\Phi = -\frac{e}{2\pi r^2 m}AB = -\frac{e}{2m}B \tag{9.27}$$

Este cambio de velocidad angular, ω_L, se denomina *frecuencia de Larmor*. El signo negativo indica que ω_L es negativo (en sentido de las agujas del reloj) cuando **B** es positivo (hacia fuera), conforme a la ley de Lenz.

Esta velocidad adicional da cuenta del momento magnético inducido, que siempre se presenta antiparalelo al campo, conduciendo a una susceptibilidad negativa. Antes de comprobar esto, vamos a demostrar el hecho de que el radio de la órbita permanece inalterado. Empecemos por recordar que, en ausencia de campo magnético, la fuerza electrostática entre el núcleo y el electrón proporciona la fuerza centrípeta que mantiene el electrón en un movimiento circular. Por tanto, escribiremos

$$F = ma = \frac{mv^2}{r} = mr\omega_0{}^2 \tag{9.28}$$

siendo F la fuerza electrostática y ω_0 la velocidad angular del electrón.

Cuando se aplica el campo magnético B, la velocidad ω_0 cambia a $\omega_0 + \omega_L$, como vimos anteriormente (ω_L será positiva o negativa según la dirección de B respecto al movimiento original). Asimismo, se añade a la fuerza centrípeta un nuevo término $e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Debido a la geometría que estamos considerando, este término vale evB. Deseamos demostrar que esta nueva fuerza magnética debida al campo aplicado B, corresponde a la variación en la fuerza centrípeta necesaria para compensar la nueva velocidad de rotación $\omega_0 + \omega_L$. Para conseguirlo escribiremos una ecuación que exprese el equilibrio de fuerzas, semejante a la Ec. (9.28), bajo las nuevas circunstancias, es decir, con el campo aplicado **B**. Esta ecuación es

$$F = mr(\omega_0 + \omega_L)^2 + evB \tag{9.29}$$

Desarrollando términos, haciendo uso de $v = r(\omega_0 + \omega_L)$, resulta

$$F = mr\omega_0^2 + 2mr\omega_0\omega_L + mr\omega_L^2 + er\omega_0 B + er\omega_L B \tag{9.30}$$

Si se expresa B en función de ω_L según la Ec. (9.27), los términos segundo y cuarto se compensan exactamente, quedando $F = mr\omega_0^2$ más otros términos en $\omega^2{}_L$ que pueden despreciarse en tanto que sea $\omega_L << \omega_0$.[1] Este es precisamente el caso que estamos considerando; por tanto, este importante resultado nos dice que después de que se ha aplicado el campo aparecen términos que se simplifican de tal modo que el valor de equilibrio para una órbita de radio r sigue siendo aún la fuerza electrostática original. El campo aplicado **B**, que provoca un cambio de velocidad, proporciona igualmente la fuerza (magnética) exactamente necesaria para mantener la órbita en equilibrio. Como consecuencia el radio permanece constante.

Vamos a calcular a continuación la contribución al momento magnético orbital que tiene la frecuencia angular adicional ω_L. El momento magnético de una corriente circular es $p_m = iA$, siendo i la intensidad de la corriente y A al área de la misma. Como $\omega_L = 2\pi f_L$ y además $i = ef_L$, siendo f_L la frecuencia de rotación producida por el campo magnético, tenemos

$$p_m = iA = ef_L A = \frac{e\omega_L}{2\pi} A \tag{9.31}$$

La ley de Lenz da como resultado que la dirección del momento dipolar inducido es tal que siempre minimiza el cambio del flujo que atraviesa la órbita. Esto significa que p_m actúa siempre en oposición al cambio introducido en **B**, dando lugar a la susceptibilidad magnética negativa del diamagnetismo.

Un ejemplo que revela la naturaleza de los efectos diamagnéticos es el caso de dos electrones que giren en sentidos opuestos en la misma órbita. En ausencia de campo exterior, los efectos magnéticos debidos al movimiento orbital de estos electrones serán nulos. Sin embargo, cuando se aplica un campo magnético la velocidad de uno de los electrones aumentará y la del otro disminuirá en la frecuencia de Larmor, de modo que ambos electrones contribuirán a producir dipolos magnéticos inducidos orientados negativamente.

Hemos examinado únicamente el caso en el que el campo magnético aplicado es perpendicular a la órbita. Aunque no lo demostraremos aquí, el momento diamagnético inducido es el mismo cualquiera que sea la orientación de la órbita con respecto al campo. Cuando no sea perpendicular el campo, ω_L ya no será paralelo a ω_0. Es decir, el movimiento con campo aplicado es un movimiento

[1] El quinto término incluye ω_L^2 ya que según la Ec. (9.27), $B \propto \omega_L$.

circular que tiene lugar en una órbita que a su vez precesiona alrededor del campo magnético con la frecuencia ω_L.

Como el diamagnetismo implica momentos magnéticos inducidos que son independientes de la orientación de los átomos, las vibraciones térmicas no afectan a las susceptibilidades diamagnéticas. La gráfica de la susceptibilidad diamagnética con la temperatura es, pues, como se indica en la Fig. 9.10. Sin embargo, con esta afirmación estamos despreciando ciertos efectos, tales como las variaciones de las constantes reticulares con la temperatura, que pueden hacer que la susceptibilidad diamagnética varíe ligeramente con la temperatura.

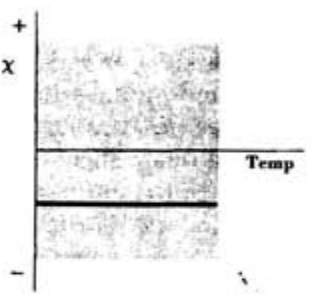


Fig. 9.10 La susceptibilidad diamagnética χ es negativa y aproximadamente independiente de la temperatura.

Por otra parte, como las susceptibilidades paramagnéticas disminuyen con la temperatura, mientras que el término diamagnético permanece esencialmente constante, se deduce que todos los materiales se hacen diamagnéticos a temperaturas suficientemente elevadas.

En la Tabla 9.1 se da una lista de la susceptibilidad neta de una serie de sustancias paramagnéticas y diamagnéticas. Las sustancias ferromagnéticas se estudiarán en la Sec. 9.10.

Algunos metales son diamagnéticos, mientras que otros son paramagnéticos. En el caso de los metales, la susceptibilidad neta está formada por las contribuciones de los electrones de conducción y de los iones metálicos de la red. Existe un término diamagnético debido a los electrones de conducción. Se trata de un efecto previsto por la mecánica cuántica que se presenta en presencia de un campo magnético. También hay una contribución paramagnética de los spines electrónicos que compensa en exceso al término diamagnético. Como la mayoría de los electrones de conducción se encuentran dispuestos en pares con orientaciones contrarias de sus spines, solamente contribuye al paramagnetismo una fracción muy pequeña de los spines electrónicos. Dada la variedad de términos que intervienen en la susceptibilidad de un metal, resulta con frecuencia difícil predecir si un metal dado será diamagnético o paramagnético.

Tabla 9.1 Susceptibilidades magnéticas, $\chi_m = M/H$, de varias sustancias
(Aproximadamente a la temperatura ambiente)

Sustancia	$\chi_m + 10^{-6}$, *unidades mks*
Aluminio	**+0,82**
Alumbre ferro-amónico	**+1,4**
Calcio	**+1,4**
Cromo	**+4,5**
Oxido cuproso	**+1,5**
Oxido férrico	**+26,0**
Magnesio	**+0,69**
Manganeso	**+1**
O_2 liquido (a −219° C)	**+390**
Platino	**+1,65**
Tántalo	**+1,1**
Bismuto	**−1,7**
Cadmio	**−0,23**
Cobre	**−0,11**
Germanio	**−0,15**
Helio	**−0,59**
Oro	**−0,19**
Plomo	**−0,18**
Cinc	**−0,20**

* Los materiales paramagnéticos tienen susceptibilidades positivas, los diamagnéticos tienen susceptibilidades negativas. Estos valores están dados en unidades mks y son 4π veces mayores que los correspondientes a unidades cgs. Este factor procede de la definición de la magnetización en el sistema cgs, que es $B = H + 4\pi M$.

9.10 Ferromagnetismo

Vamos a tratar ahora del efecto magnético más fácilmente observable, y que por ello data de los orígenes históricos del estudio del magnetismo: el ferromagnetismo, llamado así porque aparece en el hierro metálico y en ciertos compuestos de hierro. Entre los hechos experimentales figuran los siguientes: Aun cuando la magnetización no es normalmente proporcional a **H**, como en las sustancias anteriormente estudiadas, en ciertos casos pueden medirse valores de la susceptibilidad de varios millares, y obtenerse una magnetización muy grande. El valor de ésta depende no solo del campo aplicado, sino también de la historia previa de la muestra. Por ejemplo, en muchos casos, una muestra puede retener su magnetización aun en ausencia de un campo externo. Esta es la base de los imanes perma-

nentes que a todos nos son familiares. Sin embargo, resulta notable que el mismo material que puede presentar una magnetización permanente tan grande, pueda presentarse también en un estado en el que posee poca o ninguna magnetización permanente. Solo estos fenómenos ya parecen considerablemente llamativos, más aún cuando no hemos citado los hechos experimentales más extraños. Resulta de interés histórico señalar que el magnetismo de los imanes permanentes ha sido conocido por lo menos desde hace 2500 años, aunque la relación del magnetismo con las cargas en movimiento fue descubierta hace menos de 150 años, por Oersted, en 1820.

Empezaremos por demostrar cómo pueden ocurrir estos efectos magnéticos tan importantes. El origen último de los momentos magnéticos en las sustancias ferromagnéticas resulta ser (como era el caso en las sustancias paramagnéticas) los momentos magnéticos asociados al spin de los electrones. Sin embargo, la importante diferencia es que en las sustancias ferromagnéticas existen fuertes interacciones *entre* spines que les hacen alinearse paralelamente unos a otros. Aun a las temperaturas ordinarias, los pares orientadores son tan grandes que las vibraciones térmicas no pueden destruir esta alineación. Como consecuencia, la gran magnetización máxima obtenida es del mismo orden que la que se presentaría en los materiales paramagnéticos si todos los dipolos estuvieran perfectamente orientados en una dirección dada. El origen de la interacción entre dipolos es de naturaleza cuántica. Como resultado de esta interacción cuántica, la energía de dos dipolos vecinos (o dos átomos vecinos) es muchísimo menor cuando están alineados paralelamente que para cualquier otra disposición. Los dipolos están, pues, forzados a mantenerse en su orientación paralela. Unicamente cuando se calienta la sustancia ferromagnética a una temperatura muy elevada resultan suficientes los movimientos térmicos para destruir esta alineación, haciendo con ello que el material cambie su comportamiento al de una sustancia paramagnética.

Surge inmediatamente la cuestión de cómo es posible que un material ferromagnético pueda presentarse alguna vez en un estado no-magnetizado, si existen unas fuerzas tan grandes que tienden a alinear los dipolos. La solución de esta paradoja fue sugerida mucho tiempo antes de que existiera evidencia experimental alguna sobre este punto. La respuesta, que realmente se ha demostrado experimentalmente que era correcta, es que la sustancia presenta una gran tendencia a desdoblarse en *dominios* (regiones en las que todos los dipolos están alineados), cada uno con una dirección de magnetización distinta, de modo que macroscópicamente resulta una magnetización cero.

Sin embargo, nos enfrentamos aún con el problema de por qué

la sustancia se desdobla en dominios, si en las superficies de separación (las *paredes entre dominios)* existirán dipolos que no son paralelos. Deberemos, pues, justificar la presencia de fuerzas que separan los dipolos de estas paredes de la disposición paralela que debería ser preferida. Este fenómeno se explica si examinamos la situación desde el punto de vista de la energía almacenada. En la Fig. 9.11 se indican esquemáticamente una serie de posibles alterna-

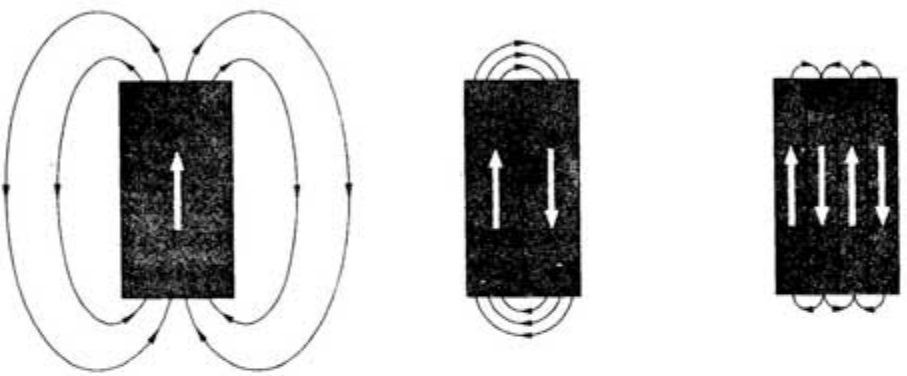


Fig. 9.11 Efecto de los dominios en la reducción del campo exterior.

tivas en la configuración de los dominios en una muestra del material; empezando por el caso en que todo el material forma un solo dominio y pasando a configuraciones con número creciente de dominios que han sido dibujadas en forma bastante idealizada, simplemente para ilustrar estas ideas. La orientación de todos los dipolos dentro de cada dominio se ha indicado mediante una flecha. El campo en el exterior del material también está indicado en forma cualitativa. La existencia de campo magnético en el exterior de la muestra implica una energía almacenada de valor

$$\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad \text{julios/voltios}$$

Al aumentar el número de dominios, el campo exterior que aparece es cada vez más pequeño, de modo que la energía almacenada en el mismo disminuye enormemente. Esta disminución está contrarrestada por la energía invertida en la formación de las paredes entre dominios, y el equilibrio corresponderá al estado en el cual la energía total almacenada sea mínima. Cálculos basados en los datos conocidos sobre el trabajo necesario para desorientar dipolos adyacentes indican que la configuración estable se alcanza con dominios cuyas dimensiones son del orden de 10^{-5} cm. Esto está en concordancia

con el tamaño de los dominios determinado experimentalmente en diversas sustancias ferromagnéticas.

Estamos ya en condiciones de comprender la naturaleza de las curvas de magnetización de los materiales ferromagnéticos. En la Fig. 9.12 se indica una curva típica de variación de **M** frente a **H**.

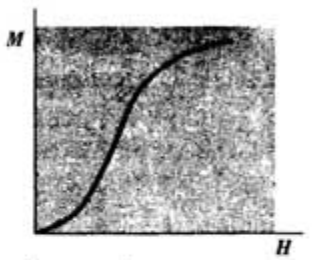


Fig. 9.12 Curva de magnetización de un material ferromagnético.

A medida que se aplica el campo magnetizante, se mueven las paredes de los dominios de modo que se favorezca el crecimiento de aquellos dominios que tienen sus direcciones de magnetización más o menos, según la dirección del campo exterior. Posteriormente cuando el campo se hace mayor, las fuerzas son lo bastante grandes para producir una rotación gradual de las direcciones de magnetización para hacerlas coincidir exactamente con la del campo. En efecto, existen ciertas direcciones de orientación de los dipolos dentro de un dominio con respecto a los ejes cristalinos que son de menor energía que otras, y estas direcciones son las adoptadas en tanto que las fuerzas debidas al campo externo no sobrepasan las fuerzas orientadoras internas. Finalmente, cuando todos los dipolos están orientados, **M** alcanza un valor constante, el de *saturación*. Frecuentemente es más conveniente representar **B** en lugar de **M**, pero la diferencia es bastante pequeña, salvo en el factor μ_0, puesto que $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, y usualmente **M** es mucho mayor que el campo magnetizante **H**.

En la Fig. 9.13 se ha representado una curva típica experimental

Fig. 9.13 Ciclo de histéresis.

de **B** frente a **H**, que indica el efecto de la historia sobre la magnetización de una muestra ferromagnética. Partimos del material desmagnetizado en *a* y aplicamos un campo *H* creciente (por medio de una corriente por un devanado que rodea la muestra) hasta que se alcanza el punto *b*. Cuando hacemos disminuir **H**, disminuyen la magnetización **M** o **B**, pero según un camino diferente. Al volver **H** a cero, perdura una cierta magnetización (punto *c*). Al valor de **B** en el punto *c* se le llama *remanencia*, y constituye el estado de magnetización permanente de la muestra. El punto *d* determina la *fuerza coercitiva*, el campo opuesto que es necesario aplicar para desmagnetizar la muestra. Si continuamos hasta el punto *e* y después invertimos el sentido de cambio de **H**, llegaremos a trazar un ciclo, llamado *ciclo de histéresis*. La causa de este ciclo es la dificultad que presenta el desplazar las paredes entre dominios. Las imperfecciones del cristal tienden a anclar las paredes, que como consecuencia no se mueven suavemente con el campo aplicado. Esta histéresis, que en algunos materiales es muy grande, es la que permite la existencia de imanes permanentes muy potentes, con toda su enorme importancia práctica. Las sustancias ferromagnéticas con mucha histéresis se llaman *duras*, mientras que las que presentan poca se denominan *blandas*.

Nuestro conocimiento sobre la naturaleza de los materiales magnéticos ha aumentado mucho en los últimos años gracias al empleo de neutrones en el estudio de las sustancias magnetizadas en forma permanente. El método está basado en el hecho de que los neutrones mismos tienen momento magnético[1] y que como consecuencia el paso de neutrones a través de la materia resulta afectado por la orientación de los momentos magnéticos atómicos en la misma. Así, pues, los experimentos de difracción de neutrones proporcionan información sobre la orientación relativa de los dipolos magnéticos de átomos vecinos. Estos experimentos demuestran la orientación paralela de los dipolos vecinos que existe en las sustancias ferromagnéticas y que en otras sustancias, llamadas *antiferromagnéticas*, se presenta una orientación antiparalela de estos vecinos. En estas últimas sustancias, pueden dividirse los momentos magnéticos en dos subredes, que se interpenetran mutuamente, en las que todos los dipolos asociados a una de las subredes son paralelos entre sí mientras que son antiparalelos con respecto a los dipolos de la otra subred. Como los efectos de las dos subredes se compensan, estas sustancias no dan lugar a campos magnéticos exteriores.

En otro tipo de sustancias, llamadas ferrimagnéticas, existen las

[1] Puede parecer sorprendente que un neutrón, cuya carga eléctrica es cero, tenga momento magnético. Esto puede explicarse admitiendo que un neutrón es una estructura compuesta constituida por cantidades iguales de carga positiva y negativa en circulación, cuyas contribuciones al momento magnético no se anulan por compensación.

dos subredes antiparalelas, pero los momentos de una de ellas dan lugar a campos mayores que los de la otra, dando lugar a un efecto ferromagnético neto. Algunas de estas sustancias, llamadas *ferritos*, por no son conductoras, se utilizan extensamente en altas frecuencias, por ejemplo, en microondas. La ausencia de electrones de conducción hace que no existan las enormes pérdidas por corrientes de Foucault que de otro modo ocurrirían a estas frecuencias elevadas.

9.11 Pérdidas por histéresis en los materiales magnéticos

Cuando se hace recorrer a un sistema un ciclo de histéresis, existe una pérdida de energía. Vamos a examinar este problema en el caso del ciclo de histéresis de un material ferromagnético. El tratamiento más sencillo corresponde al caso de una muestra toroidal en un solenoide, la magnetización se obtiene mediante una densidad de corriente solenoidal $j_v^s = Ni/L$, siendo N el número de espiras por las que pasa la corriente i, y L la longitud del solenoide. Para esta configuración geométrica hemos visto que es

$$H = j_v^s = \frac{Ni}{L} \quad \text{amperios/m} \tag{9.3}$$

Determinemos ahora la cantidad de trabajo que debe realizarse para establecer la corriente i en la bobina, produciendo el campo **B** en el material. Consideremos primero el caso sencillo en que **B** varíe linealmente con **H**, según la expresión $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, y después aplicaremos el mismo razonamiento al caso más complicado en que **B** siga un ciclo de histéresis. Despreciaremos la disipación de energía en la resistencia de la bobina, ya que estamos interesados únicamente en la energía del material magnético.

El trabajo necesario para establecer una corriente en la bobina es el resultado de la fem de inducción electromagnética que aparece mientras el campo **B** está aumentando. Como $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = -NA\, dB/dt$, podemos escribir para la potencia realizada en contra de esta fem:

$$P = -\mathcal{E}i = NA\frac{dB}{dt}i \tag{9.32}$$

Podemos hacer aparecer **H** en esta ecuación empleando la Ec. (9.3) anteriormente citada, según la cual $i = HL/N$. Si se hace esta sustitución en la Ec. (9.32), obtenemos

$$P = LAH\frac{dB}{dt}$$

Como LA es el volumen de la muestra, tenemos que la velocidad con que el trabajo se convierte en energía magnética, por unidad de volumen de sustancia, vale

$$\frac{dW}{dt} = P = H\frac{dB}{dt}$$

y si multiplicamos por dt, llegamos a la relación básica

$$dW = H\,dB \tag{9.33}$$

Cuando estamos en el caso en que $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ (Fig. 9.14), es inmediato calcular el trabajo por unidad de volumen para establecer

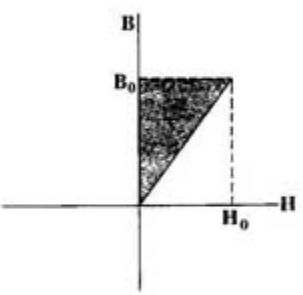


Fig. 9.14 Cálculo de $\int_0^{B_0} H\,dB$ *para el caso en que B varíe linealmente con H.*

el campo de inducción magnética B_0 por medio de la intensidad aplicada H_0. Basta sustituir en la Ec. (9.33) H por B/μ e integrar desde $B = 0$ hasta $B = B_0$. De este modo encontramos

$$W = \int dW = \int_0^{B_0} H\,dB = \frac{1}{\mu}\int_0^{B_0} B\,dB = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{\mu} = \frac{1}{2}B_0H_0 \tag{9.34}$$

Este es el mismo resultado que hallamos en la Sec. 9.7, pero ahora hemos podido ver la relación que existe entre el trabajo realizado y la curva **BH**. $\int_0^B H\,dB$ es simplemente el área rayada en la Fig. 9.14. El factor $^1/_2$ en la expresión es característico de todos los casos en los que **B** y **H** son proporcionales, como se supuso en la Sec. 9.7. Cuando se invierte el proceso, permitiendo que **H** vuelva a cero, si la curva **BH** es exactamente la misma durante esta disminución, se transmite al circuito una cantidad igual de energía, ya que la integral del trabajo tendrá el signo opuesto.

Por otra parte, si el material magnético sigue un ciclo de histéresis **BH**, tal como el indicado en la Fig. 9.13, y partimos de un punto dado describiendo un ciclo completo hasta volver al punto

original de partida, la integral de la Ec. (9.34) debe extenderse a todo el ciclo. Su valor en este caso es precisamente el área del ciclo. Debido a la histéresis, se invierte más energía para producir la magnetización que la que se devuelve cuando disminuye ésta. La energía perdida se convierte en calor.

9.12 Cuerpos magnetizados

Vamos a discutir a continuación la magnetización de cuerpos que no están limitados a una configuración geométrica tan especial como la toroidal de nuestras anteriores consideraciones. En este caso general, esta discusión será aplicable igualmente a sustancias paramagnéticas, diamagnéticas (con el apropiado cambio de signo de χ_m) y ferromagnéticas.

En la discusión precedente, con una muestra de forma toroidal, hemos demostrado que dentro del material magnético es $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$. La característica especial de esta forma es que el vector $\mathbf{M}$ en el material es siempre paralelo a su superficie. Vamos a demostrar que siempre que $\mathbf{M}$ tenga una componente perpendicular a la superficie, como es el caso de formas distintas de la toroidal, aparecen efectos adicionales que influyen sobre $\mathbf{H}$ dentro y fuera del material, y que, por tanto, modifican también $\mathbf{M}$ y $\mathbf{B}$. Sigue siendo aplicable la ecuación $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, pero, además del término Ni/L de las corrientes reales, existen otras contribuciones a $\mathbf{H}$.

Para poner un ejemplo concreto, supongamos que tenemos una muestra cilíndrica de material magnético sometido a un campo externo (Fig. 9.15), con el vector magnetización paralelo al eje. Vamos

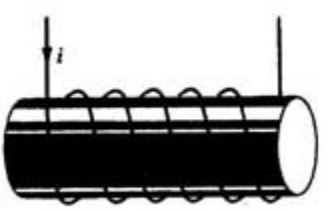


Fig. 9.15 Cuerpo magnético cilíndrico en un campo exterior.

a demostrar que por efecto de los extremos aparecen contribuciones a $\mathbf{H}$ tanto dentro como fuera de la muestra. Los extremos actúan como fuentes de $\mathbf{H}$ que deben ser tomadas en cuenta al aplicar la ecuación $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ en el interior de la muestra, o la $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ fuera de ella. Esto recuerda el efecto de las cargas superficiales de polarización inducidas en los dieléctricos.

Vamos a investigar el efecto de los extremos de la muestra en

casos como el de la Fig. 9.15. Partiremos del teorema de Gauss para **B**,

$$\int_{SC} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{9.10}$$

Como hemos visto en la Sec. 9.5, esta expresión es válida en general, haya o no materia presente. Otra relación de validez general que ya hemos introducido es que en un medio magnético **B** viene dado por

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \tag{9.5}$$

Si sustituimos en la Ec. (9.10) este valor de **B**, tendremos

$$\mu_0 \int_{SC} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \int_{SC} \mathbf{M}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

o sea,

$$\int_{SC} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = -\int_{SC} \mathbf{M}\cdot d\mathbf{S} \tag{9.35}$$

Apliquemos la Ec. (9.35) al extremo derecho del cilindro de la Fig. 9.15. Para ello, tomaremos una superficie de Gauss que encierre el extremo, de forma cilíndrica y con área de las bases A igual a la de la muestra, y encontraremos

$$\int_{SC} \mathbf{M}\cdot d\mathbf{S} = -MA \tag{9.36}$$

Lo que se deduce del hecho de que el número de líneas de **M** que entran por la cara izquierda de la superficie de Gauss es MA, mientras que el número de las que salen por la cara de la derecha es cero, ya que está fuera de la muestra y M es cero en el exterior del cuerpo magnetizado. El signo negativo resulta del hecho de estar dirigidas las líneas de M hacia dentro en la superficie de Gauss. Si se sustituye este resultado en la Ec. (9.35), obtenemos

$$\int_{SC} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = MA \tag{9.37}$$

Este es el teorema de Gauss para **H**. Nos dice que, además de las líneas cerradas de **H** debidas a las corrientes reales, existe un flujo neto de **H** que procede de cualquier región en la que **M** tenga una componente perpendicular a la superficie. Las líneas de **H** salen de la superficie (por el contrario, en el caso del extremo izquierdo de la muestra de la Fig. 9.15, en que **M** está dirigida hacia fuera sobre la parte de la superficie de Gauss interior al cuerpo, el flujo neto de líneas de **H** es hacia dentro del cuerpo). Estas líneas adicionales, que se originan o terminan en las superficies de la muestra, modifican el

campo tanto en su interior como en el exterior. Además, puede demostrarse que las líneas de **H** procedentes de cualquier región pequeña de la superficie salen radialmente exactamente como lo hacen las líneas de **E** de una carga puntual q. Podemos demostrarlo, partiendo de

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_v \tag{9.13}$$

que, como no hay corrientes reales en la superficie, se convierte en $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$. El razonamiento es el siguiente: Como el teorema de Gauss resulta aplicable a esta **H** originada por la discontinuidad de **M** en la superficie, se deduce que las líneas de **H** procedentes de esta superficie empiezan o terminan únicamente en tales regiones superficiales. Como consecuencia el concepto de líneas es válido como en el caso electrostático para **E**. Sin embargo, aún no hemos demostrado si las líneas emergen uniformemente, o, por el contrario, pueden aparecer concentradas en alguna dirección privilegiada. En la Fig. 9.16 se indican las trayectorias cerradas a lo largo de las cuales

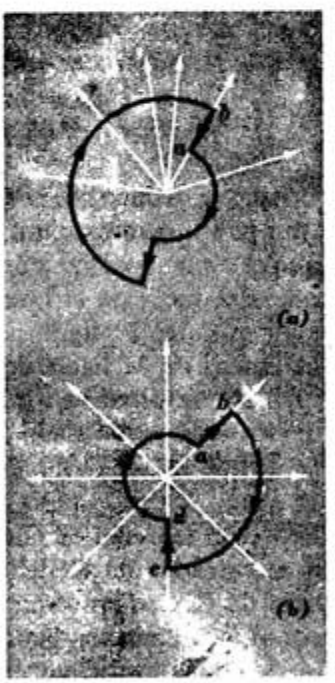


Fig. 9.16 (a) *Distribución hipotética no-uniforme de las líneas de* **H** *alrededor de una fuente* $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$; *en ella* $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. (b) *Distribución simétrica verdadera de las líneas de* **H** *alrededor de su fuente, que conduce a* $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$.

calcularemos $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ en ambos casos. En el caso 1 (Fig. 9.16*a*), en el que hemos admitido una distribución no uniforme de las líneas de **H**, es evidente que la integral curvilínea es distinta de cero, puesto

que el camino es paralelo a **H** solo entre *a* y *b*. El tramo *cd* está en una región en que **H** es cero y, por tanto, no contribuye a la integral. Así, pues, para este caso, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$. En el caso 2 (Fig. 9.16*b*), en el que las líneas están distribuidas uniformemente alrededor de la fuente puntual $\mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$, el segmento de trayectoria *ab* contribuye a la integral exactamente lo mismo que el segmento *cd*, y como las dos contribuciones tienen signos opuestos, la contribución neta es cero. Todo el resto de la trayectoria es perpendicular a **H**, de modo que su contribución a la integral de línea es nula. Así, pues, cuando las líneas de **H** están distribuidas uniformemente, $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Este razonamiento conduce directamente como resultado a que se sigue la ley de Coulomb. Esto es, los efectos del vector **H** debido a cada pequeño elemento del extremo de la muestra varían con la distancia como $1/r^2$. Por analogía con el caso electrostático podemos definir los efectos de una discontinuidad de este tipo por

$$-\int_{SC} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = q_m \tag{9.38}$$

en la que hemos llamado q_m al *polo magnético*. El teorema de Gauss para estas fuentes de **H** queda en la forma

$$\int_{SC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = q_m \quad \text{amperios/m} \tag{9.39}$$

En una sustancia paramagnética o ferromagnética, **M** tiene el mismo sentido que **H**. Como resultado, la contribución a **H** de los extremos se opone al campo y hace disminuir el valor de **H** en el interior. Fuera de la muestra las líneas de **H** que se originan en los extremos de ésta se añaden a las debidas a las corrientes que causan la magnetización y, por tanto, incrementan el valor de $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ en el exterior. En el caso de muestras de forma elipsoidal, la influencia de los extremos puede discutirse introduciendo un campo *desmagnetizante*, exactamente como hicimos al tratar del campo despolarizante en los dieléctricos. Aunque puede extenderse el concepto de factor desmagnetizante a muestras de otras formas, los resultados serían solo aproximados, como ya indicamos en el caso de las sustancias dieléctricas.[1]

Vamos a considerar a continuación el caso de muestras de dos formas extremas. En primer lugar, tomaremos una varilla, larga y

[1] Cuando el material magnético no es uniforme, es decir, si la susceptibilidad magnética no es la misma en toda la muestra, pueden existir discontinuidades de *M* en el interior de la misma. Tales discontinuidades introducen un término adicional en la Ec. (9.37), que conduce de hecho a la aparición de fuentes adicionales de *H* en el interior del cuerpo. Pero no vamos a discutir este caso con más detalle.

delgada, con su eje paralelo a un campo **B** originalmente uniforme (Fig. 9.17). Si la varilla es muy delgada comparada con su longitud,

Fig. 9.17 Varilla larga y delgada de material magnético con su eje paralelo al campo originalmente uniforme **B**.

la variación de **H** en las regiones próximas al centro debida al efecto de los extremos es muy pequeña, ya que el producto MA es muy pequeño si lo es la sección transversal A. Cualitativamente podemos razonar que **H** en la varilla será aproximadamente el mismo que en ausencia de varilla. Por tanto, **B** en la varilla valdrá $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M})$, siendo $\mathbf{H}_0$ el valor de **H** antes de colocar la varilla. Como $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}_0$, nos resulta $\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi)\mathbf{H}_0 = \mu\mathbf{H}_0$. Este es el mismo resultado que obtuvimos para la muestra toroidal, como era de esperar, puesto que en el caso que nos ocupa el efecto de los extremos es despreciable.

Otra forma de razonar que conduce al mismo resultado es considerar que en la región central de la varilla, H_0 fuera de la misma permanece esencialmente inalterada por el efecto de unos extremos tan alejados y mantiene su valor original. Pero como H_0 es paralela a la superficie en esta región central tanto dentro como fuera de la varilla y debe ser $H_{t1} = H_{t2}$, resultará $H_{interior} = H_0$. Llegamos así de nuevo a $B = H\mu_0$. Si este resultado se describe utilizando el concepto de factor desmagnetizante, según el cual el valor de **H** en el interior del cuerpo es

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - L\mathbf{M} \tag{9.40}$$

(siendo L el factor desmagnetizante apropiado a la forma particular de la muestra), resulta, por lo que hemos encontrado, que para una varilla larga y delgada, paralela a un campo uniforme, $L \sim 0$.

Veamos ahora el segundo caso, una placa delgada y plana del material magnético situada perpendicularmente a un campo originalmente uniforme (Fig. 9.18). Aquí, las líneas de **H**, que se originan

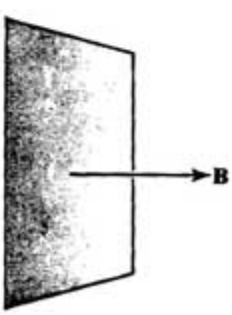


Fig. 9.18 Placa plana y delgada de material magnético con su plano perpendicular al campo originalmente uniforme **B**.

en la discontinuidad superficial de **M**, salen uniforme y perpendicularmente a la superficie en ambos sentidos, como ocurría con las líneas de **E** de una distribución plana y uniforme de carga. Como las líneas de **H** son paralelas, **H** es uniforme en el interior de la placa. Podemos obtener su valor a partir de

$$\int_{SC} \mathbf{H}\cdot d\mathbf{S} = -\int_{SC} \mathbf{M}\cdot d\mathbf{S} \tag{9.35}$$

usando el teorema de Gauss. La contribución de la cara de la derecha, hacia dentro de la placa, será $-M/2$ (puesto que la mitad de las líneas salen hacia fuera). Pero la cara de la izquierda dará también una contribución $-M/2$, de modo que **H** total dentro de la placa por efecto de sus superficies es $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$. Por otra parte, fuera de la placa estas dos contribuciones de las caras se compensan, de modo que **H** en el exterior no queda afectada por la presencia de la placa.

En este caso, dentro de la placa el campo desmagnetizante es $-\mathbf{M}$, con lo que el valor neto de **H** es $\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}$. El factor desmagnetizante L toma su valor máximo, 1, y tendremos

$$\mathbf{B} = \mu_0[(\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{M}] = \mu_0\mathbf{H}_0 \tag{9.41}$$

Podemos comprobar que se satisfacen las condiciones en la superficie límite para **B**, $B_{n1} = B_{n2}$. En efecto, **B** es perpendicular a la superficie de la placa y tiene el mismo valor dentro que fuera.

Finalmente, examinemos el caso de una esfera magnética introducida en un campo uniforme. En la Fig. 9.19 se ha dibujado el

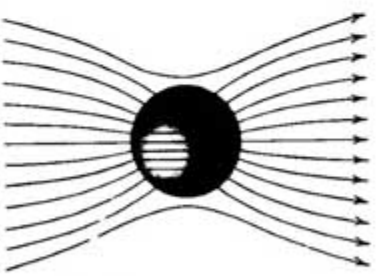


Fig. 9.19 Perturbación del campo debida a la introducción de una esfera magnética en un campo uniforme.

aspecto del campo **B** dentro y fuera de la esfera, suponiendo que en ella $\mu > \mu_0$. El campo **B** dentro de la esfera es mayor que el campo original y sigue siendo uniforme. Esta uniformidad era de esperar, puesto que la esfera es un caso especial del elipsoide, para el cual el campo desmagnetizante interior es uniforme.

Gracias a la semejanza entre las ecuaciones magnéticas y dieléctricas, resulta lógico admitir que el factor desmagnetizante para la esfera sea el mismo que el factor despolarizante para una esfera

dieléctrica, que se ha determinado en el Apéndice C. Empleando el resultado allí obtenido, $L = {}^1/_3$, el campo H dentro de la esfera será

$$H = H_0 - {}^1/_3 M \tag{9.42}$$

en la que H_0 es el valor original en ausencia de esfera. Podemos, pues, obtener B por

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0[(H_0 - {}^1/_3 M) + M] = \mu_0(H_0 + {}^2/_3 M) \tag{9.43}$$

Como $M = \chi_m H$, podemos escribir $H = H_0 - {}^1/_3 \chi_m H$, o sea

$$H = \frac{1}{1 + {}^1/_3 \chi_m} H_0$$

para el valor de H en el interior de la esfera. En el caso general, esta expresión tiene la forma

$$H = \frac{1}{1 + L\chi_m} H_0 \tag{9.44}$$

Al igual que en el caso electrostático, la perturbación sobre el campo *exterior* debida al cuerpo uniformemente magnetizado es precisamente el campo de un dipolo. Esto es cierto solo fuera de la esfera, puesto que hemos visto que dentro el campo es uniforme. Aunque en todos estos casos hemos preferido razonar tomando como base los efectos de los extremos, debidos a la discontinuidad de M en la superficie del cuerpo, hubiera resultado igualmente satisfactorio remplazar cada cuerpo magnetizado por las corrientes superficiales equivalentes. Así, por ejemplo, si se sustituye la esfera magnetizada por la densidad de corriente solenoidal equivalente $\vec{j}_{mag} = M$, el valor de **B** en el interior es ${}^2/_3\mu_0\mathbf{M}$ en lugar de $\mu_0\mathbf{M}$ como en la forma toroidal. **H** en el interior es, pues, ${}^2/_3\mathbf{M}$ en vez de **M**. De esta forma, sin hacer ninguna consideración sobre la discontinuidad de **M** en la superficie, llegamos al mismo resultado obtenido por medio del concepto de campo desmagnetizante de los polos magnéticos. Ambos puntos de vista dan siempre resultados idénticos.

9.13 Imanes permanentes

Hasta aquí hemos atribuido la magnetización **M** a la existencia de campos exteriores que provocaban la alineación de los dipolos magnéticos elementales de la sustancia. En el caso de los imanes permanentes debemos considerar que la alineación de los dipolos es el resultado de fuerzas internas. Vamos, pues, a investigar cuáles

son los campos **B** y **H** que esta automagnetización produce, tanto dentro como fuera del cuerpo imanado.

Haremos uso nuevamente de la ecuación $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$ para calcular el campo dentro de la sustancia, pero como ahora $\mathbf{H}_0$, el campo aplicado, es nulo, **H** procede únicamente del efecto de las discontinuidades superficiales de **M**, la magnetización permanente, según la ecuación $\int_{SC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = -\int_{SC} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$. En el caso de forma elipsoidal, como hemos visto $H = H_0 - LM$, pero al ser cero H_0, dentro de la muestra quedará $H = -LM$. Por tanto, dentro de la muestra **H** se opone a **M** (y a **B**) y de hecho es precisamente el campo desmagnetizante que considerábamos en la sección anterior. Solo en las muestras elipsoidales, en las que **M** es uniforme, será también uniforme **H**. Fuera de la muestra **H** no será uniforme, pero puede calcularse a partir de los polos equivalentes como vimos anteriormente.

Para formas no-elipsoidales, el campo no será uniforme ni dentro ni fuera del imán. Sin embargo, podemos calcular los valores de **B** y **H** empleando la ley de Coulomb para los polos equivalentes. Consideremos el caso de un imán en forma de varilla, tal como el indicado en la Fig. 9.20, en el que suponemos que la magnetización

Fig. 9.20 Imán permanente en forma de barra, en el que se indican las fuentes y sumideros de las líneas de **H** *en los extremos del imán.*

M es uniforme. Hemos demostrado que las líneas de **H** se originan y terminan en las discontinuidades de **M** en los extremos del imán. La intensidad de estos polos, como hemos visto, viene dada por

$$q_m = -\int_{SC} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S} = MA \tag{9.38}$$

siendo A la sección transversal del imán. El extremo del imán por el que salen las líneas de **H** se llama polo norte, y el extremo en el que convergen las líneas de **H** polo sur. Cuando estudiamos el campo en un punto lo suficiente alejado del extremo del imán para que la región del extremo pueda considerarse como pequeña frente a la distancia desde la misma al punto en cuestión, el polo puede considerarse como un punto. Aplicando el teorema de Gauss para **H**, $\int_{SC} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = q_m$, a una superficie de Gauss de forma esférica y radio r, obtenemos

$$H = \frac{1}{4\pi} \frac{q_m}{r^2} \quad \text{o} \quad B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_m}{r^2}. \tag{9.45}$$

Expresión que nos da el campo **B** en cualquier punto fuera de la varilla debido al polo q_m. Como en un cuerpo magnetizado siempre hay asociados un polo norte y un polo sur, el campo neto en cualquier punto es la suma vectorial de las contribuciones de ambos polos. Esta es exactamente la misma situación que teníamos en electrostática cuando calculábamos el campo eléctrico de un dipolo. Como las líneas de **H** emergen del polo norte q_m es positivo para un polo norte y negativo para un polo sur. Si el punto en que estamos examinando el campo está muy alejado del imán en relación con su longitud L, las expresiones para **B** o **H** se reducen a la ecuación usual del dipolo, Ec. (6.24), siendo el momento dipolar $p_m = q_m L$.

Por tanto, según la ecuación del dipolo magnético, el par sobre una varilla imanada situada en un campo magnético uniforme es

$$\tau = p_m B \operatorname{sen} \theta \tag{6.23}$$

También podemos obtener la expresión de la fuerza que actuaría sobre un polo magnético aislado. Si sustituimos en la ecuación anterior p_m por $q_m L$, tendremos

$$\tau = q_m L B \operatorname{sen} \theta \tag{9.46}$$

Que es exactamente análoga a la de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico. En este último caso, la fuerza es $F = qE$ y, por analogía, la fuerza sobre un polo magnético debe ser

$$F = q_m B \tag{9.47}$$

Para un polo norte (+), la fuerza es paralela a **B**; para un polo sur (−), la fuerza es antiparalela a **B**.

Hemos desarrollado ya las ecuaciones del campo y las fuerzas para imanes permanentes. Podemos, pues, calcular el campo en cualquier punto del espacio, debido a un conjunto de imanes permanentes, mediante la Ec. (9.45) y determinar la fuerza sobre cada polo en un campo dado mediante la Ec. (9.47). Este cálculo es posible únicamente si la magnetización de los imanes es constante y no resulta afectada por los campos exteriores. En muchos casos esta hipótesis resulta una buena aproximación. Finalmente, conviene señalar que, en principio, todos los resultados que hemos obtenido empleando el concepto de polos magnéticos podrían haber sido obtenidos sustituyendo cada imán por una corriente superficial solenoidal equivalente.

También debemos decir unas palabras sobre la nomenclatura de polos magnéticos norte y sur y su relación con el campo magnético

terrestre. Un nombre más correcto para el polo norte de un imán tal como lo hemos definido sería polo *que mira al norte*. Igualmente el polo sur debería llamarse polo *que mira al sur*. Como polos de nombre opuesto se atraen, esto quiere decir que el polo magnético de la tierra próximo al norte geográfico es un polo magnético sur. El campo magnético terrestre puede describirse aproximadamente como el campo de un dipolo cuyo eje es aproximadamente paralelo al eje de rotación de la tierra. La componente horizontal del campo magnético terrestre está dirigida generalmente en la dirección sur-norte. El origen principal del campo terrestre está probablemente en corrientes de convección de materia fundida conductora que existen en la región central de la tierra. Este movimiento da lugar a una corriente eléctrica dentro de la tierra y como consecuencia a un campo magnético. Es improbable que las sustancias ferromagnéticas tengan un papel importante en el magnetismo terrestre, puesto que podemos esperar que pierdan su gran susceptibilidad y se conviertan en paramagnéticas a las elevadas temperaturas del interior de la tierra.

9.14 Ejemplos

a) Campo dentro y fuera de una barra magnetizada permanentemente. En la Sec. 9.12 hemos encontrado que el factor desmagnetizante L para esta forma es casi cero. Por tanto, dentro de la barra $H = H_0 - LM$ es aproximadamente cero, puesto que el campo aplicado es cero. Cualquiera que sea el valor de H que exista en la barra se opone a M. Fuera de la barra, el campo puede calcularse empleando la Ec. (9.45), $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_m}{r^2}$, aplicada a ambos extremos, siendo $q_m = MA$. El campo que resulta se ha indicado en la Fig. 9.21.

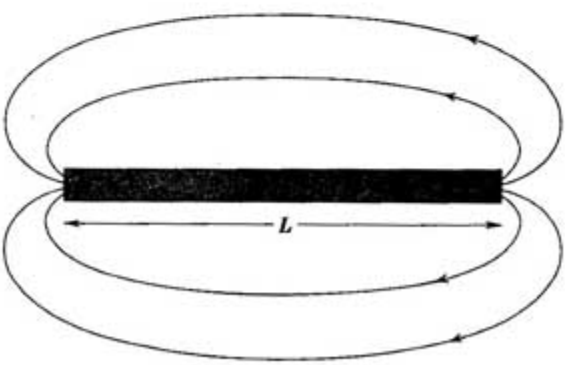


Fig. 9.21 Barra imanada. El campo exterior puede describirse mediante polos de intensidad q_m separados por una distancia L.

b) Campo dentro y fuera de una placa delgada magnetizada en forma permanente perpendicularmente a su plano. En la Sec. 9.12 en-

contramos que para este tipo de magnetización el factor desmagnetizante vale 1. La expresión de **B** dentro de la placa era

$$\mathbf{B} = \mu_0[(\mathbf{H}_0 - \mathbf{M}) + \mathbf{M}] = \mu_0\mathbf{H}_0 \tag{9.41}$$

de modo que en este caso, cuando el campo aplicado $\mathbf{H}_0 = 0$, dentro de la placa $\mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{H} = -\mathbf{M}$. Así, pues, **H** dentro de la placa se opone a **M** y tiene su misma magnitud. Fuera de la placa como $B_{n1} = B_{n2}$, **B** es también cero, lo mismo que **H**. En todo esto, estamos despreciando los efectos perturbadores de los bordes de la placa.

c) Campo dentro y fuera de una esfera magnetizada permanentemente. En la Sec. 9.12 encontramos que el campo dentro de una esfera de magnetización **M** situada en un campo exterior vale

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \tfrac{2}{3}\mathbf{M}) \tag{9.43}$$

En ausencia de tal campo exterior será $\mathbf{B} = {}^2/_3\mu_0\mathbf{M}$. Este resultado se deducía del hecho de ser el factor desmagnetizante para la esfera $L = {}^1/_3$, como se demuestra en el Apéndice C para el caso dieléctrico. El campo dentro de la esfera es, pues, $\mathbf{H} = -{}^1/_3\mathbf{M}$. **H** es uniforme y se opone a la magnetización permanente **M**. Ya hemos indicado que fuera de la esfera el campo es el de un dipolo. Podemos determinar el valor del momento dipolar aplicando las condiciones en la superficie de la esfera en el punto en que la corta el eje de magnetización. Este punto es el *P* de la Fig. 9.22. En este punto **B** es normal a la superficie, de modo que debe tener el mismo valor dentro que en un punto situado fuera, pero

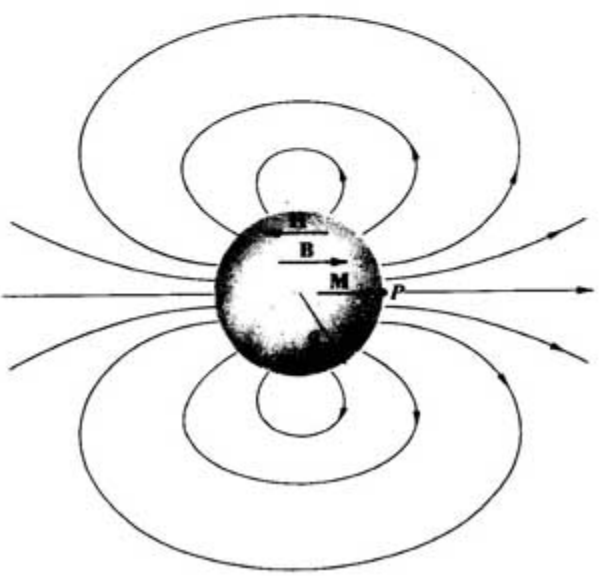


Fig. 9.22 Campo magnético en las proximidades de una esfera uniformemente magnetizada; M, B y H son uniformes dentro de la esfera. Nótese que H se opone a B dentro de la esfera.

muy cerca de la superficie (puesto que $B_{n1} = B_{n2}$). El valor de **B** en el punto P dentro de la superficie es $^2/_3\mu_0\mathbf{M}$. Empleando la fórmula del dipolo fuera de la esfera, haciendo cos $\theta = 1$, tenemos según la Ec. (6.24)

$$B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_m}{a^3} \tag{9.48}$$

siendo a el radio de la esfera. Comparando estas dos expresiones vemos que p_m valdrá

$$p_m = {}^4/_3\pi a^3 M \tag{9.49}$$

El valor de **B** en cualquier punto fuera de la esfera, puede ya obtenerse sumando vectorialmente las dos componentes de **B**, $\mathbf{B}_r$ y $\mathbf{B}_\theta$, que se obtienen sustituyendo en las ecuaciones del dipolo (6.24) este valor de p_m. El momento dipolar de la esfera es precisamente el producto de la magnetización por el volumen.

d) *Cálculo del campo interior a una esfera permanentemente magnetizada por medio de la corriente superficial solenoidal equivalente.* Vamos a incluir aquí este cálculo, para ilustrar el hecho de que es posible simular los efectos de los cuerpos magnetizados por medio de una densidad de corriente solenoidal equivalente en la superficie del cuerpo. En la Sec. 9.2 encontramos que los efectos magnéticos producidos por un cuerpo uniformemente magnetizado podían remplazarse por los de una corriente de Ampere superficial de densidad $\vec{j}_{mag}$

$$\vec{j}_{mag} = M \tag{9.2}$$

En la Fig. 9.23 se han dibujado algunas de las espiras de hilo arrolladas sobre la esfera en las que una corriente i produce un campo equivalente al de la corriente superficial de Ampere. Las espiras están devanadas uniformemente según el eje z a fin de obtener una densidad de corriente solenoidal uniforme. Vamos a calcular ahora el

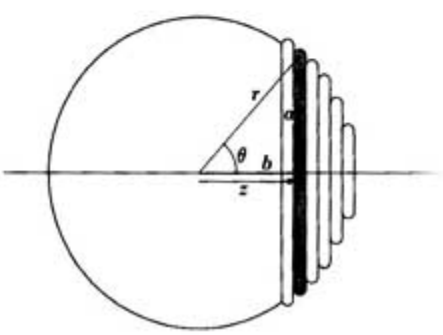


***Fig. 9.23** Devanado con corriente solenoidal uniforme sobre la superficie de una esfera.*

campo en el centro de la esfera, debido a esta corriente. Calcularemos la contribución de una espira y después integraremos para tomar en cuenta todas las espiras existentes sobre la esfera.

La contribución de la espira que hemos escogido valdrá

$$dB = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{a^2}{r^3} \tag{6.8}$$

Si llamamos z a la distancia desde el centro de la esfera a una espira dada, a lo largo del eje z, será $z = r \cos \theta$ y $dz = r \operatorname{sen} \theta \, d\theta$. Si dz es el espesor de una espira, $i = j \, dz$. Asimismo, el radio de la espira será $a = r \operatorname{sen} \theta$. Sustituyendo estos valores en la Ec. (6.8) obtenemos

$$dB = -\frac{\mu_0 j}{2} \frac{r^3 \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta}{r^3}$$

o sea

$$B = \frac{\mu_0 j}{2} \int \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta = \frac{\mu_0 j}{2} \left(-\frac{1}{3} \cos \theta \, (\operatorname{sen}^2 \theta + 2) \right)$$

$$= {}^2/_3 \mu_0 j$$

Como la corriente j se ha empleado para simular j^s_{mag} la haremos igual a M. Así tenemos

$$B = {}^2/_3 \mu_0 M \tag{9.50}$$

que es el valor hallado en el problema anterior empleando el método de los polos magnéticos. Nótese que nuestra demostración ha sido únicamente para el centro de la esfera. Sin embargo, podríamos demostrar que B sigue siendo uniforme en toda la esfera.

9.15 Circuitos magnéticos

El problema general de los cuerpos magnéticos en campos externos es sumamente difícil. Es necesaria la solución simultánea de

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = i_v \tag{9.13}$$

$$\int_{SC} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{9.10}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \tag{9.9}$$

y las condiciones para **B** y **H** en las superficies límites [Ecs. (9.16) y (9.18)]. Sin embargo, existen situaciones, en las que intervienen materiales ferromagnéticos, de un tipo que presenta importancia práctica y es fácil de resolver aproximadamente. En la Fig. 9.24 se indica

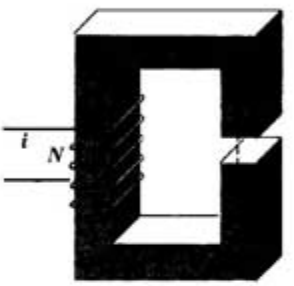


Fig. 9.24 Electroimán como ejemplo de un circuito magnético.

como ejemplo un electroimán. El problema es determinar el valor de **B** en todos los puntos del circuito magnético indicado. En particular, podríamos desear el valor de **B** en el entrehierro. Supondremos conocido el valor de la corriente magnetizante i en las N espiras de la bobina, el área A de todas las secciones transversales, y la permeabilidad μ en todos los puntos. Además, supondremos que las líneas de **B** son paralelas y están confinadas en el interior del material. Esto es aproximadamente cierto si la sustancia empleada tiene un gran valor de μ (como ocurre en el caso de los materiales ferromagnéticos).

Emplearemos en primer lugar la Ec. (9.13), al tomar la integral curvilínea a lo largo de todo el circuito,

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + \cdots = Ni \tag{9.51}$$

En esta expresión hemos dividido la integral en varias partes, cada una de las cuales corresponde a una porción que tenga un valor constante de μ e igual sección transversal. El cos θ del producto escalar vale 1 debido a que **H** en todas partes es paralelo al camino de integración escogido. La Ec. (9.10) nos dice que las líneas de **B** son continuas a lo largo de todo el circuito. Por tanto, el flujo que atraviese cualquier sección transversal del circuito es el mismo. Podemos relacionar el valor de H en cualquier porción con el flujo por medio de la Ec. (9.9), obteniendo

$$\Phi = BA = \mu HA \tag{9.52}$$

en la que μ y A son las correspondientes a esta porción. Así encontramos

$$H_1 = \frac{\Phi}{\mu_1 A_1} \qquad H_2 = \frac{\Phi}{\mu_2 A_2} \cdots$$

Que sustituyendo en la Ec. (9.51) nos da

$$Ni = \Phi\left(\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \cdots\right) \tag{9.53}$$

En esta ecuación puede despejarse Φ, con lo cual puede calcularse $B = \Phi/A$ en cualquier sección, en particular en el entrehierro (en el que pondremos $\mu = \mu_0$) de nuestro ejemplo del electroimán. La Ec. (9.53) puede interpretarse por analogía con un circuito eléctrico serie, en el que $V = i(R_1 + R_2 + \cdots)$. Así como la corriente es continua, en el caso magnético es continuo el flujo. Los términos $l/\mu A$ son de la misma forma que la resistencia y se combinan en serie y en paralelo de igual forma que las resistencias. Se suelen denominar *reluctancia magnética* $\mathscr{R}$. La fuerza excitadora para el magnetismo Ni se llama *fuerza magnetomotriz* (fmm). Con ello la ecuación puede escribirse en la forma

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{\mathscr{R}} \tag{9.54}$$

Es fácil ver, según las anteriores ideas, por qué el campo magnético de un electroimán puede aumentarse construyendo las piezas polares de forma troncocónica. La reluctancia total del circuito magnético permanece prácticamente inalterada, de modo que el flujo no cambia. Sin embargo, el área efectiva de la sección transversal en el entrehierro se reduce considerablemente con lo que $B = \Phi/A$ aumentará mucho. Si la reducción de sección se hace demasiado bruscamente, las líneas de B no serían ya conducidas por el material y la mejora sería muy pequeña.

PROBLEMAS

9.1 Sobre una muestra toroidal de un material magnético cuya susceptibilidad es $\chi_m = 2 \times 10^{-2}$ se han devanado 1000 espiras por las que circula una corriente de 2 amp. El toroide tiene 15 cm de longitud.

a) Calcular la densidad de corriente solenoidal $\vec{j}_v$.

b) Determinar el campo magnético H producido por la corriente.

c) Calcular μ, la permeabilidad magnética del material.

d) Calcular la magnetización M producida en el material.

e) Calcular el campo magnético B resultante tanto de la corriente como de la magnetización del material.

9.2 En el campo magnético no-uniforme existente entre los polos de un imán se coloca una barra de un material paramagnético de sección transversal uniforme A, en la forma indicada en la Fig. P 9.2. Calcúlese la fuerza vertical sobre la barra debida al campo no uniforme. Para ello, determínese el efecto que sobre la energía magnética almacenada tiene un pequeño desplazamiento de la barra en la dirección de su eje. Para simplificar el problema, considérese que en lugar de mover la barra completa se quita una porción de altura dx del extremo inferior y se añade de nuevo en el superior. Si el campo en el extremo inferior de la barra es H_1 y en el superior H_2, demostrar que el *cambio* en la energía magnética viene dado por (véase Sec. 9.7)

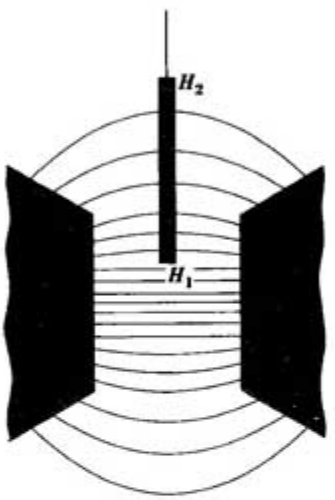


Fig. P 9.2

$$dW = \tfrac{1}{2}A(\mu - \mu_0)(H_1^2 - H_2^2)\,dx$$

Empleando este resultado, demostrar que la fuerza sobre la barra es

$$F = \tfrac{1}{2}A\mu_0\chi(H_1^2 - H_2^2) \quad \text{newtonios}$$

Este es el método usado normalmente para determinar la susceptibilidad estática de las sustancias paramagnéticas. Nótese que si el material es diamagnético la fuerza sería en sentido opuesto.

9.3 Un anillo de hierro de 5 cm de radio y 2 cm^2 de sección transversal tiene una permeabilidad de 1.000 μ_0 (supóngase constante). Está devanado con 1.500 espiras por las que circulan 5 amp. Calcúlese:

a) La autoinducción de la bobina.
b) La intensidad del campo magnético.
c) La densidad de corriente solenoidal de la bobina.
d) La magnetización del hierro.
e) La densidad de corriente amperiana inducida.
f) La energía almacenada en el campo magnético.

9.4 Dos barras uniformemente magnetizadas tienen longitud L y sección transversal A. Su magnetización es de M amp/m. Determínese la intensidad de sus polos q_m. Si uno de los imanes se mantiene suspendido sobre el otro por efecto de la repulsión entre polos iguales y la masa de cada uno es m kg, hallar la ecuación cuya solución conduce a una distancia de equilibrio x entre las barras.

9.5 Dos imanes permanentes iguales A y B, cuyo momento magnético es p_m, están situados como se indica en la Fig. P 9.5. La distancia que los separa es grande comparada con sus dimensiones. Si se sitúa una brújula a una distancia x_1 de uno de los imanes y x_2 del otro, toma una posición de equilibrio indicada en la figura formando un ángulo θ con la línea que une los imanes. Determínese el valor de la relación x_1/x_2.

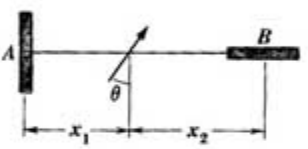


Fig. P 9.5

9.6 El electroimán indicado en la Fig. P 9.6 está formado por hierro con una permeabilidad $\mu = 800\ \mu_0$. Las dimensiones transversales del hierro son 10×10 cm^2, y la longitud total, incluido el entrehierro de 2 cm, es de 200 cm. ¿Cuántos ampere-vueltas se necesitarán en la bobina para conseguir un campo de 5.000 gauss (0,5 weber/m^2) en el entrehierro, suponiendo que en éste las líneas del campo se mantienen paralelas entre sí? ¿Cuál será el valor de B dentro del hierro? ¿Cuánto valdrá H en el entrehierro y dentro del hierro? ¿Cuál será la magnetización M en el hierro?

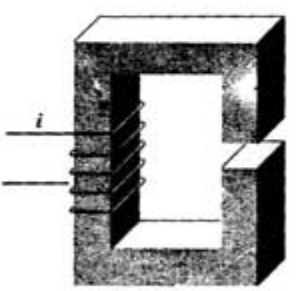
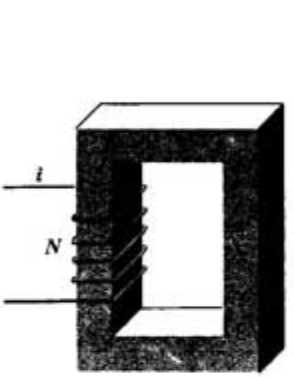


Fig. P 9.6

9.7 El hierro metálico contiene aproximadamente 10^{29} átomos por metro cúbico. El momento magnético de cada átomo de hierro es $1{,}8 \times 10^{-23}$ amp-m^2. Si no existieran fuerzas ferromagnéticas internas que tendieran a alinear los dipolos (esto es, si el hierro fuera paramagnético), ¿cuál sería la susceptibilidad del hierro a 300° K? ¿Cuál sería el momento dipolar de una barra de hierro (si fuera paramagnético) de 10 cm de larga y 1 cm^2 de sección transversal situada en un campo de 1.000 gauss (0,1 weber/m^2)? Si todos los dipolos estuvieran alineados en un solo dominio como resultado de las interacciones ferromagnéticas, ¿cuál sería la magnetización M de la barra? ¿Cuál sería el momento magnético de la misma? ¿Cuál sería el par que actuaría sobre esta barra ferromagné-

tica en un campo de 100 gauss perpendicular a su eje? ¿Cuál sería la intensidad de los polos de la barra ferromagnética?

9.8 Una autoinducción está formada por 100 vueltas de hilo devanadas sobre un núcleo cerrado de hierro de 20 cm de longitud y 1 × 1 cm^2 de sección transversal, como se indica en la Fig. P 9.8. A través de la bobina pasa una corriente alterna de 60 ciclos/seg. El hierro recorre su ciclo de histéresis completo en cada ciclo de la corriente. Calcular aproximadamente la potencia perdida por efecto de la histéresis. Empléese la expresión de $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ para calcular la corriente máxima en la bobina a partir de los datos suministrados en el ciclo gráfico. ¿Cuál es la autoinducción del sistema en las condiciones del problema? Indíquese cualitativamente cómo afectará a la autoinducción el que pase una corriente doble por la bobina.



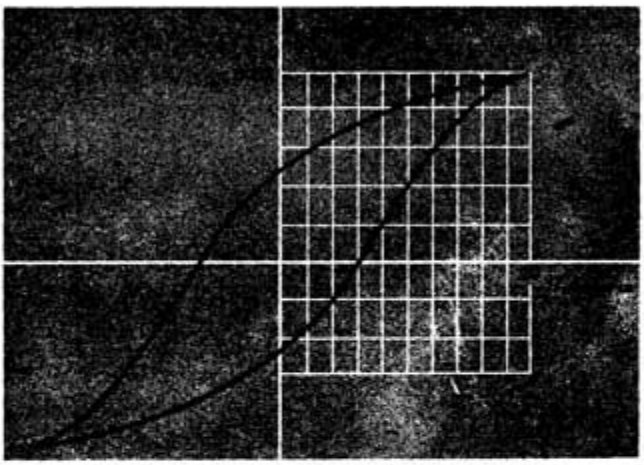


Fig. P 9.8

Fig. P 9.9

9.9 Se construye un electroimán en la forma indicada en la Fig. P 9.9. La longitud total del hierro que constituye las dos partes es L, su sección transversal A, y la permeabilidad μ. El imán se excita mediante una corriente i que pasa por las N espiras. Las dos mitades del imán están separadas por una distancia X, siendo $X << A$. Calcúlese la fuerza de atracción entre estas dos mitades (véase Sec. 9.7).

9.10 Se construye una autoinducción variable devanando una bobina sobre un núcleo de hierro de 30 cm de longitud, que tiene un entrehierro ajustable. Sin entrehierro, la autoinducción es 2 henrys. ¿Para qué entrehierro la autoinducción se reduce a 1 henry? La permeabilidad del hierro es 1.000 μ_0.

DIEZ

Circuitos de Corriente Alterna

10.1 Introducción

Vamos a volver de nuevo al estudio de los circuitos. Esto no implica nuevos principios eléctricos o magnéticos, puesto que depende de las características de los tres elementos de circuitos pasivos, R, C y L, que ya hemos estudiado. En electricidad aplicada los circuitos de corriente alterna son de gran importancia, pero aquí nos limitaremos a discutir los circuitos elementales y al estudio de algunos métodos sencillos para su análisis. Nuestro objetivo es llegar a ser capaces de determinar las corrientes y tensiones en un circuito, tal como el indicado en la Fig. 10,1, cuando está conectado a una fuente de tensión sinusoidal. Desarrollaremos los conceptos de fase y amplitud de las funciones sinusoidales, que son los empleados

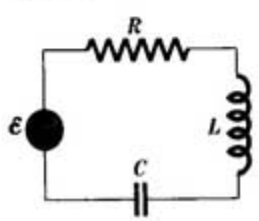


Fig. 10.1 Circuito serie en corriente alterna.

para describir el comportamiento del circuito y de sus componentes individuales. El análisis de los circuitos de corriente alterna exige el planteamiento y solución de ciertas ecuaciones diferenciales. Para profundizar más en el conocimiento de tales circuitos, examinaremos el problema desde varios puntos de vista.

Además de desarrollar las ideas necesarias para discutir las relaciones tensión-intensidad en los circuitos de corriente alterna, mencionaremos brevemente los filtros eléctricos, discutiremos la disipación de potencia en los circuitos de alterna y consideraremos algunos de los instrumentos empleados para medir intensidades, tensiones y potencias en corriente alterna. Para terminar el capítulo, haremos una breve descripción del transformador, de los generadores de energía eléctrica y de los motores para convertir la energía eléctrica en energía mecánica.

10.2 Tensiones sinusoidales

Vimos en el Cap. 8 que, según la ley de inducción de Faraday, en una bobina de N espiras, y área A, que gire con una velocidad angular ω en un campo uniforme **B**, se induce una fem:

$$\mathcal{E} = NAB\omega \operatorname{sen} \omega t \tag{8.20}$$

Esta bobina girando a velocidad constante constituye un generador de alterna, que podría emplearse como fuente de tensión en el circuito de la Fig. 10.1. Antes de seguir adelante, vamos a discutir varias formas de describir matemáticamente una tensión de este tipo. Escribiremos de nuevo la Ec. (8.20) en la forma $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \operatorname{sen} \omega t$, o bien, puesto que la fem da lugar a una tensión entre extremos del circuito, podremos escribir por conveniencia

$$v = V_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{10.1}$$

Esta curva se ha dibujado en la Fig. 10.2. V_0 se denomina *amplitud*,

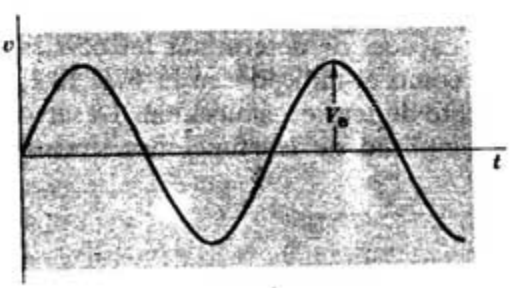


Fig. 10.2 Variación con el tiempo de una tensión sinusoidal de amplitud V_0.

ω *pulsación* ($\omega = 2\pi f$, siendo f la *frecuencia*), y el *argumento* ωt, de la función sinusoidal, *fase* de la tensión. Para aclarar esta termi-

nología, consideremos el círculo generatriz indicado en la Fig. 10.3. Imaginemos un punto que gira sobre la circunferencia con la fre-

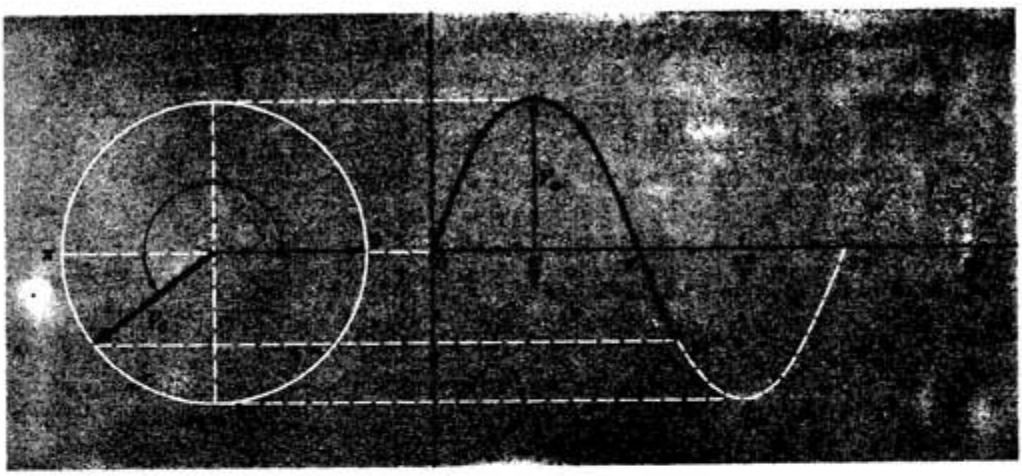


Fig. 10.3 Circunferencia generatriz para la función seno.

cuencia f revoluciones por segundo, o sea $\omega = 2\pi f$ radianes/seg, en sentido contrario a las agujas del reloj. El radio vector que determina este punto, dibujado en la figura, ocupa en el instante $t = 0$ la posición correspondiente a la línea de trazo fino. La proyección de este punto sobre el eje y se mueve sinusoidalmente de arriba abajo y viceversa, y si desplazamos el punto proyectado según el eje t en la forma indicada, se traza la función sinusoidal. Los términos *amplitud*, *fase*, *frecuencia* y *pulsación* son evidentes en este esquema.

Podríamos haber alcanzado el mismo resultado partiendo de la expresión

$$v = V_0 \cos \omega t \tag{10.2}$$

La única diferencia está en el valor inicial de la función para $t = 0$, que es cero para la función seno y tiene el valor máximo para la función coseno. Evidentemente, puede usarse cualquiera de las dos.

En lo que sigue, se da especial importancia al comportamiento de los circuitos cuando se aplica una tensión *sinusoidal*. Aunque existen muchas otras formas de variación de tensión más o menos complicadas, hay dos razones para concentrarse en ésta de tipo sencillo. Una es que en gran parte de las aplicaciones prácticas de la corriente alterna aparecen tensiones e intensidades sinusoidales. La otra es que uno de los métodos para estudiar el comportamiento del circuito frente a variaciones con el tiempo más complicadas es analizar esta variación temporal por medio de los efectos superpuestos

de funciones seno y coseno apropiadas. Así, pues, el problema básico en todos los casos es el conocimiento del comportamiento de los circuitos para tensiones aplicadas sinusoidales. El análisis de este comportamiento por superposición de funciones seno y coseno depende de la naturaleza *lineal* de los elementos de circuito básicos. Por ejemplo, encontraremos que cuando se duplica la tensión alterna aplicada a una resistencia, a un condensador o a una autoinducción, la corriente alterna que pasa también se duplica.

10.3 Relaciones entre tensión e intensidad

Antes de considerar el comportamiento de un circuito como el de la Fig. 10.1, vamos a resumir lo que sabemos acerca de la relación tensión-intensidad cuando se aplica una tensión sinusoidal a los tres elementos de circuito por separado.

Resistencia. La ecuación correspondiente al circuito de la Fig. 10.4

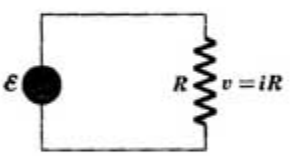


Fig. 10.4 Circuito con una fem y una resistencia.

es $\mathcal{E} = v = iR$. Como R es una constante, si v o i son sinusoidales la otra también lo será y tendrá la misma fase. Por ejemplo, podemos tomar como tensión sinusoidal $v = V_0 \cos \omega t$. Sustituyendo en la ecuación del circuito obtenemos para la corriente

$$i = \frac{V_0}{R} \cos \omega t \tag{10.3}$$

La amplitud de la corriente sinusoidal es, pues, V_0/R. Si llamamos I_0 a esta amplitud tenemos

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \tag{10.4}$$

Como tanto i como v son proporcionales a cos ωt, la intensidad de la corriente a través de la resistencia, está en fase con la tensión entre sus extremos. Según las Ecs. (10.3) y (10.4) la ley de Ohm es válida no solo para los valores instantáneos de i y v, sino también para las amplitudes sinusoidales I_0 y V_0.

Podemos demostrar gráficamente los resultados anteriores como se indica en la Fig. 10.5. En ella los vectores V_0 e I_0 que se han dibujado dan las amplitudes y fase relativa de las dos magnitudes sinusoidales v e i. Si también fijamos la frecuencia o pulsación ω del

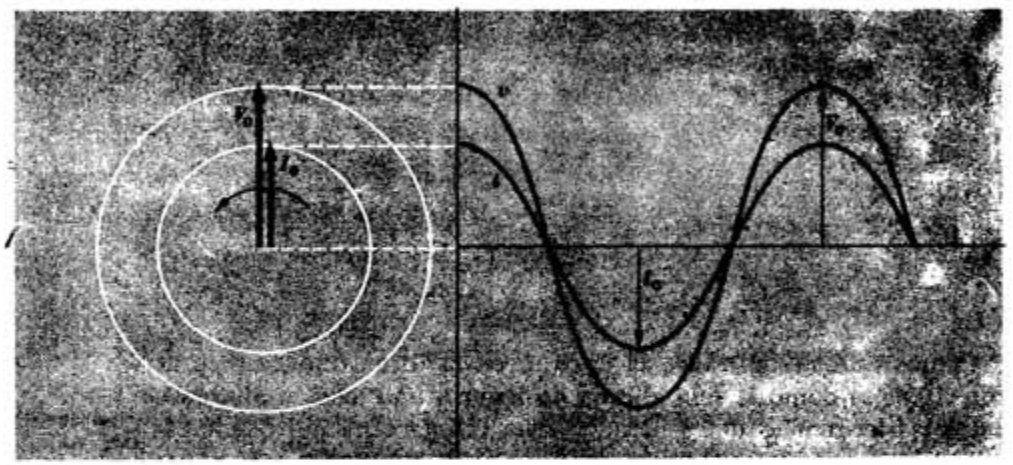


Fig. 10.5 Relación entre la tensión y la intensidad en una resistencia. Ambas magnitudes están en fase.

sistema, tenemos todos los datos necesarios sobre v e i. Llamaremos a estas líneas V_0 e I_0 del diagrama *vectores generatrices* de la tensión y la intensidad.

Autoinducción. En la Fig. 10.6*a* se indica una autoinducción co-

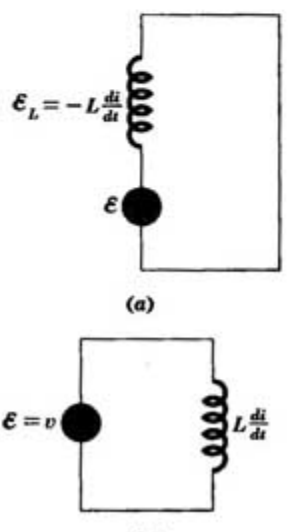


Fig. 10.6 Autoinducción pura conectada a una fem alterna. (a) La ecuación para el circuito es $\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0$. (b) Si la tensión aplicada es $\mathcal{E} = v$, la caída de tensión en la autoinducción es $v = L\,di/dt$.

nectada a una fem alterna $\mathcal{E}$. La fem inducida en la autoinducción vendrá dada por

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{di}{dt} \tag{8.17}$$

Como la ecuación del circuito es

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0$$

nos resulta

$$\mathcal{E} - L\frac{di}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathcal{E} = L\frac{di}{dt}$$

Podemos dibujar de nuevo el circuito en la forma indicada en la Fig. 10.6*b*, y como la fem alterna da lugar a una tensión alterna v entre los terminales del generador, esta última ecuación puede escribirse

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{10.5}$$

Por tanto, la tensión aplicada v produce una corriente variable en la autoinducción. El valor de di/dt es el que da la Ec. (10.5).

Si tomamos $v = V_0 \cos \omega t$, despejando di/dt se obtiene

$$\frac{di}{dt} = \frac{V_0}{L}\cos \omega t$$

y por integración llegamos a la expresión para la intensidad de la corriente

$$i = \frac{V_0}{\omega L}\int \cos \omega t\, \omega\, dt = \frac{V_0}{\omega L}\operatorname{sen} \omega t \tag{10.6}$$

Si llamamos I_0, como anteriormente, a la amplitud de esta intensidad, tenemos

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L} \tag{10.7}$$

La magnitud ωL juega el papel de R en la Ec. (10.4), y se llama *reactancia inductiva*. La Ec. (10.7) tiene la misma forma que la ley de Ohm, pero la intensidad y la tensión no tienen la misma fase. Si

v varía como el cos ωt, i varía como el sen ωt. Este resultado se ha expresado en la Fig. 10.7. Mediante la representación gráfica vemos

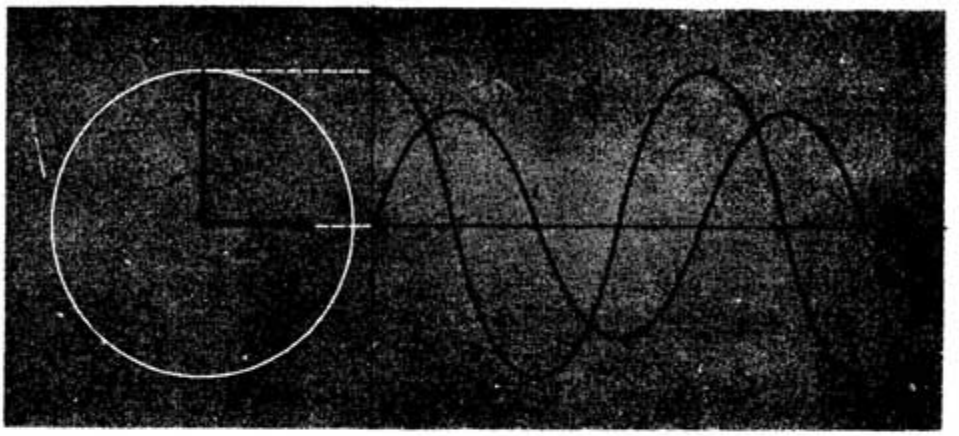


Fig. 10.7 Relación entre la tensión y la intensidad en una autoinducción. La intensidad está retrasada con respecto a la tensión en un ángulo de fase de 90°.

que la fase de la intensidad está *retrasada* respecto a la fuente de tensión en un ángulo de fase de 90°. También podemos llegar a este resultado mediante la transformación trigonométrica,

$$i = \frac{V_0}{\omega L}\operatorname{sen}\omega t = \frac{V_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Condensador. La ecuación del circuito de la Fig. 10.8 con un condensador es $\mathcal{E} = v = q/C$. Mediante $i = dq/dt$, podemos derivando convertirla en

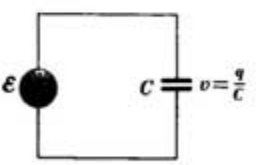


Fig. 10.8 Circuito con fem y un condensador.

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{C}i \tag{10.8}$$

Y tomando de nuevo $v = V_0 \cos \omega t$, encontramos $dv/dt = -\omega V_0$ sen ωt, por tanto

$$i = -\omega C V_0 \operatorname{sen}\omega t \tag{10.9}$$

En la Fig. 10.9 se han dibujado estas funciones. La amplitud de la intensidad es

$$I_0 = \omega C V_0 \tag{10.10}$$

Esta vez el término que remplaza a R en la ley de Ohm es $1/\omega C$. Esta magnitud se llama *reactancia capacitiva*. En este caso, la fase

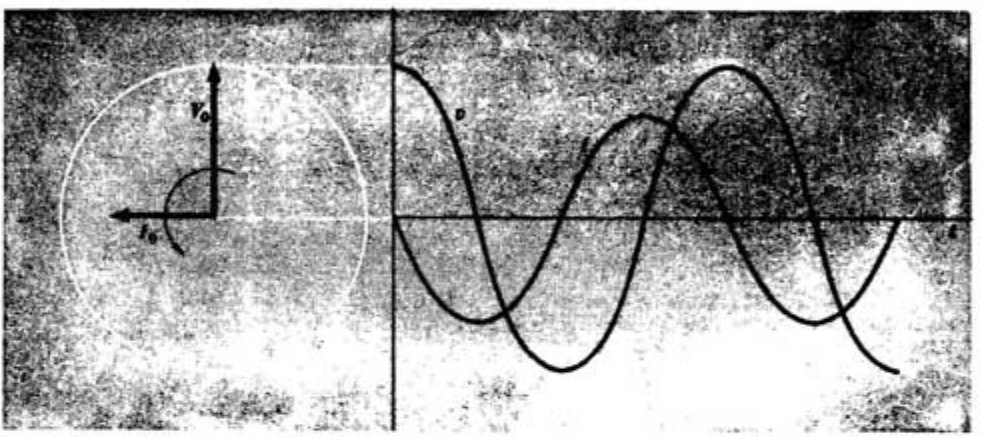


Fig. 10.9 Relación entre la tensión y la intensidad en un condensador. La intensidad adelanta en 90° a la tensión.

de la intensidad *adelanta* en 90° a la tensión. Esto se deduce de nuevo de la transformación trigonométrica

$$i = -\omega C V_0 \operatorname{sen} \omega t = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \tag{10.11}$$

10.4 Circuito RLC serie

Vamos ahora a considerar el circuito serie completo de la Fig. 10.1. Para determinar el comportamiento del circuito, debemos señalar primeramente el hecho importante de que en tal circuito la intensidad instantánea es la misma en todas partes. Esto se deduce directamente de la ecuación de continuidad. Aunque dentro del condensador se almacene carga, fuera de él no hay ningún sistema que pueda almacenarla, y el movimiento de carga en un conductor implica una corriente igual en todos sus puntos. Aun en el condensador vemos que el aumento de carga positiva en una placa exige un aumento igual de carga negativa en la otra placa, lo que es equivalente a que las intensidades en ambos lados sean iguales.

Teniendo presente este hecho, podemos obtener la solución del problema por un método gráfico simple.

En la Fig. 10.10 se han dibujado los tres diagramas de las Figs. 10.3, 10.5 y 10.7, modificados en dos aspectos. Se ha cambiado

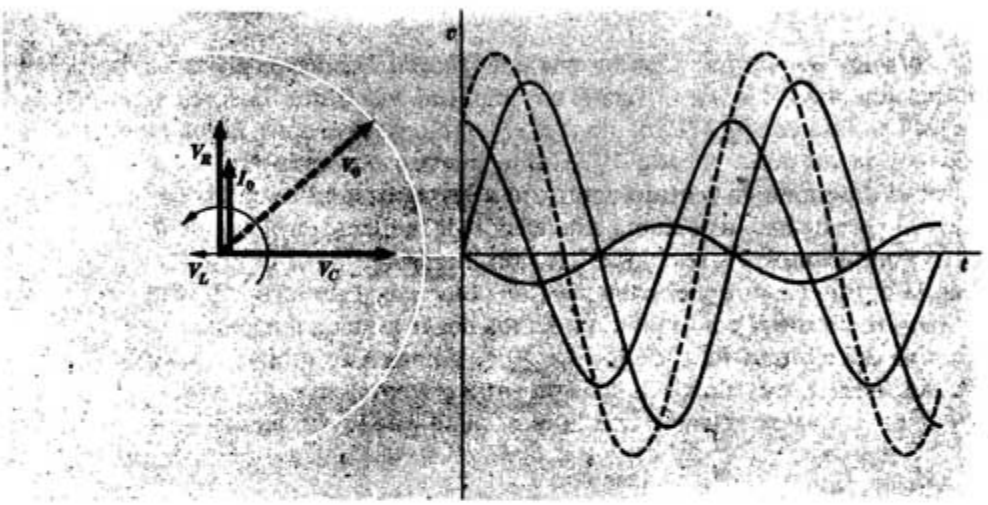


Fig. 10.10 Circunferencia generatriz para obtener la solución gráfica del circuito serie RLC.

la escala de modo que la amplitud de la intensidad sea la misma en todos, o sea $I_R = I_L = I_C$. Asimismo, los diagramas se han girado unos respecto a otros hasta conseguir que los vectores generatrices de la intensidad sean paralelos. Estas dos modificaciones son las apropiadas para el circuito serie, en el que la intensidad en todos los puntos del circuito es la misma. Habiendo conseguido que la amplitud y fase de la intensidad sea la misma en todos los elementos, nos resulta que los vectores generatrices de la tensión correspondientes V_R, V_L y V_C nos dan ahora las amplitudes y fases relativas de las tensiones sinusoidales entre extremos de los elementos.

El valor instantáneo de la tensión del generador es igual a la suma de las tensiones instantáneas entre extremos de cada elemento. Sin embargo, como la suma de tensiones sinusoidales de la misma frecuencia es siempre otra tensión sinusoidal, podemos expresar este mismo hecho diciendo que el vector generatriz de la tensión resultante, entre extremos de todos los elementos, es precisamente igual a la suma vectorial de los vectores generatrices individuales. A fin de obtener la amplitud y fase de este vector (que se ha representado de trazos en la Fig. 10.10), se han dibujado de nuevo los vectores individuales en la Fig. 10.11 de forma que pueda realizarse su suma.

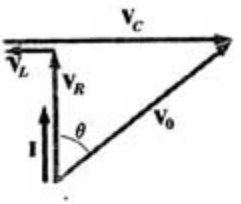


Fig. 10.11 Diagrama vectorial que da la suma vectorial de las tensiones en un circuito serie RLC.

La rotación del diagrama en bloque a la frecuencia adecuada genera la tensión sinusoidal de la fuente de amplitud V_0. Como la corriente está en fase con V_R, el ángulo θ es el ángulo de fase entre la intensidad y la tensión aplicada V_0. Como nuestro convenio era hacer girar el diagrama en sentido contrario a las agujas del reloj, en este ejemplo la intensidad adelanta a la tensión de la fuente en el ángulo θ.

Si empleamos las relaciones tensión-intensidad para la resistencia, la autoinducción y el condensador obtenidas anteriormente y el diagrama vectorial como guía, podemos llegar a una solución cuantitativa del circuito *RLC* de la Fig. 10.1. Vamos a resumir estos resultados anteriores, dando la tensión entre extremos en cada elemento de circuito y su relación con la intensidad que lo atraviesa:

$$V_R = I_R R \qquad I_R \text{ en fase con } V_R$$

$$V_L = I_L \omega L \qquad I_L \text{ retrasada } 90° \text{ respecto a } V_L$$

$$V_C = I_C \frac{1}{\omega C} \qquad I_C \text{ adelantada } 90° \text{ respecto a } V_C$$

Como establecimos anteriormente, en el circuito serie la intensidad tiene la misma amplitud y fase en todos los puntos. Por tanto, tenemos

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I}_R = \mathbf{I}_C = \mathbf{I}_L$$

Como en este circuito serie la tensión aplicada al circuito es la suma vectorial de los vectores generatrices de tensión, podemos escribir

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L + \mathbf{V}_C = I_0\left(\mathbf{R} + \omega\mathbf{L} + \frac{1}{\omega\mathbf{C}}\right) \tag{10.12}$$

En esta expresión hemos indicado la naturaleza vectorial de la suma poniendo **R**, ω**L** y $1/\omega$**C** después de dividir por el término común I_0, para recordar el carácter vectorial de los vectores generatrices de tensión. El diagrama vectorial para cada uno de los términos será ahora el mismo que el de la Fig. 10.11 salvo un cambio de escala.

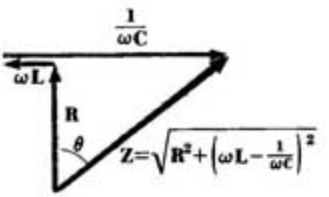


Fig. 10.12 Diagrama vectorial para las impedancias. La impedancia Z es la suma vectorial de los términos resistencia y reactancia.

Este diagrama se ha dibujado en la Fig. 10.12. Por ser rectángulo el triángulo que resulta, la solución de la Ec. (10.12) para I_0 resulta ser

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} = \frac{V_0}{Z} \tag{10.13}$$

Hemos introducido la magnitud

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{10.14}$$

que se denomina *impedancia* del circuito serie. Como es

$$Z = \frac{V_0}{I_0} \tag{10.15}$$

la impedancia en este circuito de corriente alterna juega el papel de la resistencia en un circuito de corriente continua. Nótese que siempre que los términos de *reactancia* contribuyen a Z, el vector tensión V_0 entre extremos del circuito está fuera de fase con el vector intensidad I_0. Arbitrariamente hemos elegido el sentido de $L\omega$ en la Ec. (10.13) como positivo, lo que hace $1/\omega C$ negativo. Como el término reactivo $(L\omega - 1/\omega C)$ figura elevado al cuadrado, esta elección no tiene influencia sobre el valor de la impedancia.

El resultado dado en la Ec. (10.13) relaciona únicamente la amplitud de la intensidad a través del circuito con la amplitud de la tensión aplicada. Para determinar la relación entre las fases de la intensidad y la tensión aplicada, escribiremos la expresión de la intensidad instantánea

$$i = \frac{V_0 \cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/\omega C)^2}} \tag{10.16}$$

Según esta ecuación, θ es el ángulo con que la intensidad está *retrasada* respecto a la tensión aplicada. En las Figs. 10.11 ó 10.12 podemos ver que el valor de θ es tal que

$$\text{tg } \theta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{10.17}$$

Tal como hemos elegido los signos de ωL y $1/\omega C$ en el diagrama vectorial, si $(\omega L - 1/\omega C)$ es positivo θ será positivo.
ejemplo, θ es negativo, lo que corresponde a una intensidad que *adelanta* a la tensión aplicada.

Lo usual es escribir los términos reactivos de la impedancia en la forma siguiente:

Reactancia inductiva:

$$\omega L = X_L$$

Reactancia capacitiva:

$$\frac{1}{\omega C} = X_C$$

Reactancia total:

$$X = X_L - X_C$$

Con esta nomenclatura la impedancia resulta:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{10.18}$$

Vamos a obtener ahora la misma solución del circuito serie *RLC* de la Fig. 10.1, algo más rigurosamente. Si se aplica una tensión sinusoidal al circuito, la corriente resultante será también sinusoidal. Podemos, pues, escribir las expresiones siguientes para la intensidad y la tensión:

$$i = I_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad \text{y} \qquad v = V_0 \operatorname{sen} (\omega t - \theta) \tag{10.19}$$

Unicamente hemos hecho aquí la hipótesis de que la tensión total v (que debe ser igual a la tensión de la fuente de energía eléctrica) es sinusoidal, y tiene la misma frecuencia que la corriente sinusoidal. Deseamos obtener la amplitud y el ángulo de fase. El hecho de que las tensiones instantáneas en cada elemento se suman para dar la tensión aplicada puede expresarse en la forma

$$RI_0 \operatorname{sen} \omega t + L\omega I_0 \cos \omega t - \frac{I_0}{\omega C} \cos \omega t = V_0 \operatorname{sen} (\omega t - \theta) \tag{10.20}$$

Hemos hecho esta suma, teniendo en cuenta el adelanto o retraso de fase de las tensiones empleando la función trigonométrica (seno o coseno) apropiada. La solución de esta ecuación nos permite hallar la relación entre V_0 e I_0, así como el ángulo de fase entre ellas.

Como esta ecuación es cierta en todo instante, podemos escribir particularizando para $\omega t = 0$ y para $\omega t = \pi/2$, las ecuaciones

$$L\omega I_0 - \frac{I_0}{\omega C} = V_0 \operatorname{sen}(-\theta) = -V_0 \operatorname{sen}\theta \qquad (\omega t = 0)$$

$$RI_0 = V_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = V_0 \cos\theta \qquad \left(\omega t = \frac{\pi}{2}\right) \tag{10.21}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando, teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, resulta

$$\left[R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] I_0{}^2 = V_0{}^2 \tag{10.22}$$

Si despejamos I_0, obteniendo la raíz cuadrada, llegamos de nuevo a la Ec. (10.13) deducida anteriormente por el método gráfico.

Un método aún más elegante de resolver los problemas de corriente alterna es el empleo de magnitudes complejas. En el Apéndice D se da una descripción breve de cómo se aplica esta técnica.

10.5 Circuito RLC paralelo

Otro circuito que podemos examinar con facilidad es el indicado en la Fig. 10.13. En él, la tensión aplicada a todos los elementos es

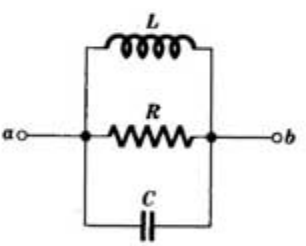


Fig. 10.13 Circuito RLC paralelo.

la misma en amplitud y fase. Esto exige que las intensidades sean ahora diferentes. Podemos obtener la amplitud de la intensidad en cada uno de los elementos mediante las ecuaciones siguientes:

$$|\mathbf{I}_R| = \frac{V_0}{R}$$

$$|\mathbf{I}_C| = \frac{V_0}{X_C} = \frac{V_0}{1/C\omega} \tag{10.23}$$

$$|\mathbf{I}_L| = \frac{V_0}{X_L} = \frac{V_0}{L\omega}$$

Las fases relativas de estas intensidades se obtienen notando que la intensidad en el condensador adelanta a la tensión en 90° y en la autoinducción retrasa en 90°. Así es posible dibujar un diagrama de fases para las intensidades como el de la Fig. 10.14. Hemos lla-

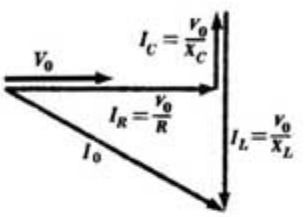


Fig. 10.14 Diagrama vectorial para el circuito RLC paralelo, que da la suma vectorial de las intensidades.

mado I_0 a la suma vectorial de las intensidades; esta suma es, pues, la intensidad que entra y sale por los terminales del conjunto *a* y *b*. Como la tensión aplicada está en fase con la intensidad en la resistencia, tal como se ha indicado en el diagrama, θ es el ángulo de fase entre la intensidad resultante y la tensión aplicada. Calcularemos el valor de la intensidad por medio de la relación

$$I_0 = |\mathbf{I}_R + \mathbf{I}_C + \mathbf{I}_L| = V_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right) = V_0\frac{1}{Z} \tag{10.24}$$

en la que la suma debe ser vectorial. Así, pues, para el circuito paralelo,

$$\frac{1}{Z} = \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2\right]^{1/2} \tag{10.25}$$

Nótese que los signos de X_C y X_L son los opuestos a los que usábamos en el caso del circuito serie. Esto resulta de que en el caso paralelo tienen la misma fase las tensiones, mientras que en el caso serie tienen igual fase las intensidades. La expresión completa para la intensidad resulta ser

$$i = \left[\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2\right]^{1/2} V_0 \cos(\omega t + \theta) \tag{10.26}$$

estando θ determinado por

$$\text{tg}\ \theta = \frac{1/X_C - 1/X_L}{1/R} = \frac{\omega C - 1/\omega L}{1/R}$$

10.6 Resonancia

Aún hay otro aspecto del circuito serie de la Fig. 10.1 que vamos a examinar ahora. Si nos fijamos de nuevo en la ecuación que nos da la intensidad en el circuito serie

$$i = \frac{V_0 \cos(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \tag{10.16}$$

encontramos que para una serie de valores dados de R, L, C y V_0, la impedancia $Z = [R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}$ varía con la frecuencia y, por consiguiente, la intensidad varía en amplitud y fase. La corriente es máxima para una frecuencia tal que

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \tag{10.27}$$

Si llamamos ω_0 a esta frecuencia de resonancia, tenemos que

$$\omega_0 = \left(\frac{1}{LC}\right)^{1/2} \tag{10.28}$$

Para este valor particular de la frecuencia, i y v están en fase y la relación tensión-intensidad coincide con la ley de Ohm. En el diagrama de la Fig. 10.11 vemos que la condición de resonancia es que las tensiones entre extremos de L y de C sean iguales y opuestas, de modo que el ángulo de fase sea cero. Nótese también que si la resistencia es muy pequeña, la intensidad se hace muy grande en resonancia. Igualmente, cuanto menor sea la resistencia, más rápida será la variación con la frecuencia de la intensidad en las proximidades de la resonancia.

La importancia de la resonancia es muy grande, puesto que en otros campos de la Física se presentan efectos exactamente semejantes; por ejemplo, el caso sencillo de un péndulo en el que existe un cierto amortiguamiento (lo que conduce a un término equivalente a la resistencia).

El circuito paralelo de la Fig. 10.13 también presenta un comportamiento resonante. En este caso la resonancia corresponde a $1/X_C = 1/X_L$, lo que conduce de nuevo a $\omega_0 = (1/LC)^{1/2}$. Nótese que en resonancia Z es máxima, con lo que la intensidad es mínima. Un modo de interpretar la situación en resonancia es decir que I_0 es precisamente igual a la intensidad a través de la resistencia, aunque además en el circuito existen otras corrientes circulando a través de L y C, éstas son de igual magnitud y sentidos opuestos, y como consecuencia se compensan y no dan contribución alguna a la intensidad exterior I_0.

10.7 Transitorios

En cualquier circuito en que se pueda almacenar energía, como en un condensador cargado o en una autoinducción recorrida por una corriente, si aplicamos o quitamos bruscamente una tensión existe un periodo durante el cual el circuito se adapta a las nuevas condiciones. Estos efectos temporales se denominan *transitorios*, y vamos a discutir unos cuantos casos.

El primer ejemplo es el de una resistencia y una autoinducción en serie, a las que se conecta una tensión cerrando un interruptor, en la forma indicada en la Fig. 10.15. La resistencia presente puede

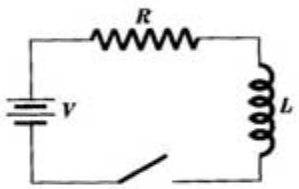


Fig. 10.15 Esquema para estudiar el régimen transitorio en un circuito RL serie.

ser simplemente la resistencia mínima inevitable del circuito o bien una resistencia incluida a propósito. Tan pronto como se cierra el interruptor, la situación está descrita por la expresión

$$V = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{10.29}$$

que es una ecuación diferencial, cuya solución particular para este caso exige establecer las condiciones iniciales. Es evidente que en esta ecuación pueden separarse las variables con lo que su solución es muy fácil. En efecto, podemos escribir

$$\frac{-R\,di}{V - Ri} = -\frac{R}{L}dt$$

en la que hemos multiplicado ambos miembros por $-R$ con objeto de que el primero resulte una diferencial exacta. Integrando resulta

$$\ln (V - Ri) = \frac{-R}{L}t + C \tag{10.30}$$

Podemos determinar el valor de la constante de integración C a partir de las condiciones iniciales, ya que para $t = 0$, al cerrar el interruptor, es $i = 0$. Así resulta $C = \ln V$. Introduciendo este valor y poniendo la ecuación en forma exponencial, tenemos

$$V - Ri = Ve^{-(R/L)t} \tag{10.31}$$

La corriente valdrá

$$i = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) = I(1 - e^{-(R/L)t}) \tag{10.32}$$

Hemos remplazado V/R por I, el valor *estacionario* de la intensidad, que se alcanza cuando ha transcurrido un tiempo suficientemente largo. Esta solución se ha dibujado en la Fig. 10.16. El comportamiento del circuito queda completamente determinado por el parámetro R/L, o por su recíproco $L/R = \tau$, denominado *constante de tiempo* del circuito. Empleando esta definición, la ecuación queda en la forma

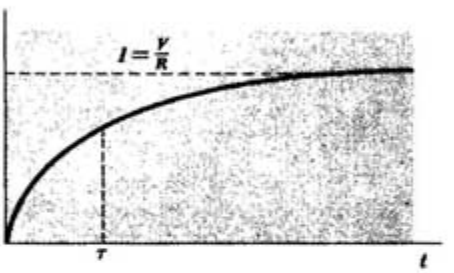


Fig. 10.16 Variación con el tiempo de la intensidad en un circuito RL.

$$i = I(1 - e^{-t/\tau}) \tag{10.33}$$

τ es el tiempo necesario para que la intensidad crezca hasta $(1 - 1/e)$, o sea 0,632, de su valor final. Esto resulta de hacer $t = \tau = L/R$, en efecto

$$i = I\left(1 - \frac{1}{e}\right) = I(1 - 0{,}368) = 0{,}632I$$

Vamos a ver a continuación el efecto de quitar bruscamente la tensión aplicada al circuito, cambiando el conmutador indicado en la Fig. 10.17 de la posición A a la B. Si tomamos $t = 0$ en el instante en que se mueve el conmutador, la ecuación que describe el circuito resulta ser

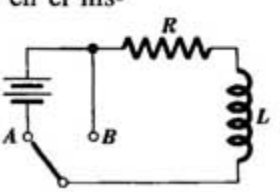


Fig. 10.17 Esquema del circuito RL para introducir un transitorio eliminando bruscamente la fuente de tensión.

$$0 = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Separando variables e integrando obtenemos

$$\ln i = -\frac{R}{L}t + C$$

Si introducimos la condición inicial de que para $t = 0$, $i = I$, el valor estacionario de la intensidad, resulta

$$i = Ie^{-(R/L)t} = Ie^{-t/\tau} \tag{10.34}$$

En la Fig. 10.18 se da una gráfica de esta ecuación. En este caso τ

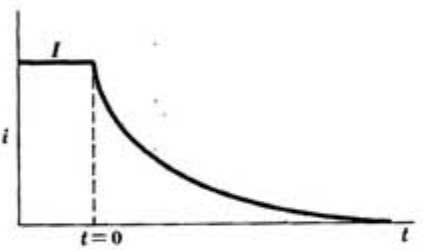


Fig. 10.18 Disminución de la intensidad en el circuito RL después de haber eliminado la fuente de tensión.

es el tiempo para que la intensidad caiga a $1/e$ de su valor estacionario.

Vamos ahora a considerar el circuito con condensador de la

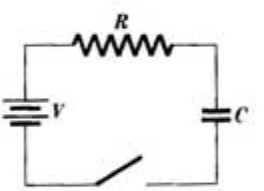


Fig. 10.19 Esquema para introducir bruscamente una tensión V en un circuito RC.

Fig. 10.19. La ecuación aplicable, una vez que se ha cerrado el interruptor, es

$$V = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \tag{10.35}$$

en la que hemos puesto dq/dt en lugar de i para tener solo las variables q y t. Separando variables e integrando, deducimos

$$\ln\left(V - \frac{q}{C}\right) = -\frac{t}{RC} + K$$

Si determinamos la constante de integración K mediante la condición de que para $t = 0$, $q = 0$, esto es, partimos del condensador descargado, obtenemos

$$V - \frac{q}{C} = Ve^{-t/RC}$$

Y despejando q

$$q = CV(1 - e^{-t/RC}) = Q_0(1 - e^{-t/\tau}) \tag{10.36}$$

en la que hemos escrito Q_0 en lugar de CV, para la carga del condensador en el equilibrio y τ en lugar de RC, para la constante de tiempo en este caso. Derivando podemos obtener la intensidad:

$$\frac{dq}{dt} = i = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{V}{R} e^{-t/\tau} \tag{10.37}$$

Esta curva se ha representado en la Fig. 10.20. En ella hemos dibujado también el aumento de carga del condensador según la Ec. (10.36).

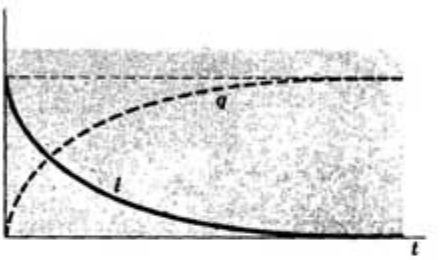


Fig. 10.20 Régimen transitorio en el circuito RC serie.

Finalmente, estudiaremos el caso de la descarga del condensador como se indica en la Fig. 10.21. Inicialmente el condensador está

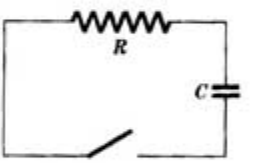


Fig. 10.21 Descarga de un condensador a través de una resistencia.

cargado a un potencial $V_0 = Q_0/C$. Cuando se cierra el interruptor, el fenómeno estará descrito por la ecuación

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0 \tag{10.38}$$

que es la misma que la Ec. (10.35) salvo que la tensión de la batería es cero. Resolviéndola por el método usual nos da

$$q = Q_0 e^{-t/RC} \tag{10.39}$$

Y la expresión de la intensidad es

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC} = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \tag{10.40}$$

Este resultado es idéntico al de la Ec. (10.37). Sin embargo, la corriente en este último caso pasa en el sentido en que da lugar a

la descarga del condensador, mientras que en el caso anterior pasaba en el sentido en que provoca la carga del condensador.

Es posible construir circuitos con resistencia y condensador que tengan constantes de tiempo que van desde tiempos muy cortos a muchos segundos. Como resultado existen muchas aplicaciones prácticas de estos circuitos. Por ejemplo, el método más corriente de medir resistencias de valor muy grande es determinar la forma de la descarga de un condensador cuando se conecta la resistencia entre sus terminales. De este modo pueden medirse resistencias hasta de 10^{12} ohms. El método está basado evidentemente en la medida de τ, a partir de la cual R puede calcularse según $RC = \tau$, si se conoce el valor del condensador.

10.8 Filtros eléctricos

Otro campo de gran interés práctico, asociado con la respuesta de los circuitos con resistencia, autoinducción y capacidad a una corriente alterna, es el de los *filtros*. Un filtro es un circuito que permite pasar señales eléctricas de ciertas frecuencias y atenúa otras en mayor o menor extensión. Examinemos en forma cualitativa el comportamiento de dos circuitos filtro muy sencillos, que se han indicado en la Fig. 10.22. La señal eléctrica se aplica a los terminales

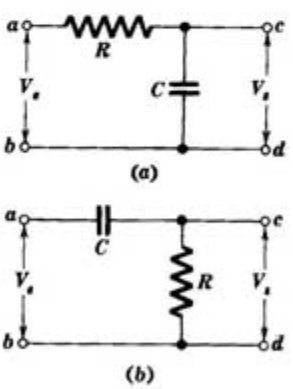


Fig. 10.22 Dos circuitos filtro sencillos. (a) Es un filtro pasa-baja y (b) es un filtro pasa-alta.

a y b y la salida se toma entre c y d. En (a) podemos reconocer el circuito RC antes estudiado, pero con una tensión alterna aplicada entre a y b. La salida es la tensión entre terminales del condensador. La impedancia que ofrece la resistencia es R y la del condensador $1/\omega C$; por tanto, la impedancia de C y R en serie es

$$\left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]^{1/2}$$

Si la amplitud de la tensión de entrada es constante, podemos obtener la tensión de salida en función de la frecuencia por la relación

$$V_s = V_e \frac{1/\omega C}{[R^2 + (1/\omega C)^2]^{1/2}} \tag{10.41}$$

Esta variación se recoge en la Fig. 10.23. Cuando $1/\omega C = R$, o sea $\omega = 1/RC$, la salida es $(1/\sqrt{2})V_e$. En esta sencilla deducción de la

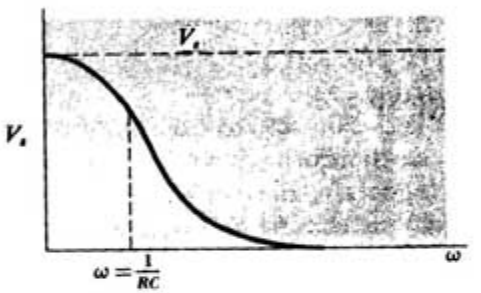


Fig. 10.23 Salida de un filtro pasa-baja.

Ec. (10.41) hemos despreciado los posibles efectos de la impedancia que pueda estar conectada a la salida. En muchas aplicaciones se tratará de una impedancia o resistencia, mucho mayor que R, o $1/\omega C$, en el intervalo de frecuencias de interés, con lo que esta aproximación es válida. Este circuito se denomina *filtro pasa-baja*, puesto que las señales de alta frecuencia (ω varias veces mayor que $1/RC$) resultan fuertemente atenuadas.

El circuito *b* de la Fig. 10.22 funciona del modo contrario y se denomina *filtro pasa-alta*. La tensión de salida viene dada por

$$V_s = V_e \frac{R}{[R^2 + (1/\omega C)^2]^{1/2}} \tag{10.42}$$

empleando el mismo razonamiento que antes. La curva de atenuación es la dibujada en la Fig. 10.24.

En general, puede obtenerse un *corte* más rápido (una variación de la atenuación con la frecuencia más brusca) mediante circuitos

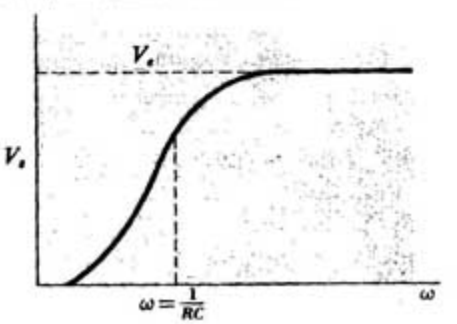


Fig. 10.24 Salida de un filtro pasa-alta.

más complicados, que usualmente contienen también autoinducciones. Un aspecto, inherente al hecho de que la atenuación es función de la frecuencia, que tiene considerable importancia, es que necesariamente la diferencia de fase entre la entrada y la salida varía también con la frecuencia.

En muchas aplicaciones la señal o tensión de entrada al filtro, dista mucho de ser sinusoidal. Sin embargo, como discutimos en la Sec. 10.2, el comportamiento del filtro puede estudiarse dividiendo la señal en sus componentes sinusoidales equivalentes y tratando cada una separadamente. El método llamado *análisis de Fourier* trata precisamente el problema de la relación entre una función variable con el tiempo y sus componentes sinusoidales. Un ejemplo de la acción selectiva de un filtro es su efecto sobre la música que se ha transformado en una complicada señal eléctrica en una radio o fonógrafo. El oído percibe fácilmente el efecto de un filtro pasa-baja que elimina todas las componentes sinusoidales por encima de una cierta frecuencia, o bien, el efecto de un filtro pasa-alta que elimina todas las componentes por debajo de otra frecuencia dada. Es posible también construir filtros más complicados que permitan el paso de señales en una cierta banda de frecuencias que detengan las restantes frecuencias, tanto mayores como menores.

10.9 Potencia en los circuitos de corriente alterna

Hasta aquí hemos considerado las señales sinusoidales caracterizadas por su frecuencia y amplitud. Al considerar la disipación de energía lo normal es manejar los llamados *valores eficaces* de la tensión y la intensidad. El valor eficaz de una señal en corriente alterna es el valor de una señal de corriente continua o constante, que desarrollara la misma potencia que la señal de alterna. Un ejemplo de todos conocido es la tensión de 127 ó 220 voltios, de los circuitos de alumbrado en corriente alterna. Este es el valor eficaz de la tensión; la amplitud o valor máximo, es realmente $127 \times \sqrt{2} = 178{,}6$ voltios. Vamos a ver de qué procede este factor, y discutir el efecto que sobre la potencia tiene el hecho de que la intensidad y la tensión no estén en fase, como ocurre ordinariamente en los circuitos de corriente alterna que contienen autoinducciones y condensadores.

Deduciremos la relación entre valores máximo y eficaz considerando una resistencia de valor R recorrida por una intensidad continua I_0 durante un tiempo t. La cantidad de calor desprendida será $I_0^2 Rt$. Si sustituimos la corriente continua por corriente alterna y deseamos que el calor desprendido sea

$$I_{ef}^2\, Rt \quad \text{julios} \tag{10.43}$$

habremos de determinar la relación entre esta I_{ef} así definida y el valor máximo de la corriente alterna I_0, siendo $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$.

La potencia instantánea será i^2R vatios; por tanto, en el tiempo t, el calor desarrollado valdrá

$$I_{ef}^2 \, Rt = \int_0^t i^2 R \, dt = \int_0^t I_0^2 R \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt \tag{10.44}$$

Si eliminamos R y sacamos I_0, que es constante, fuera de la integral, podemos despejar I_{ef}^2:

$$I_{eff}^2 = I_0^2 \left(\frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{sen}^2 \omega t \, dt \right) = I_0^2 \, \overline{\operatorname{sen}^2 \omega t} \tag{10.45}$$

siendo $\overline{\operatorname{sen}^2 \omega t}$ el valor medio de $\operatorname{sen}^2 \omega t$, la magnitud encerrada en el paréntesis. Puede demostrarse que

$$\overline{\operatorname{sen}^2 \omega t} = \tfrac{1}{2} \tag{10.46}$$

de varias formas. Un método gráfico muy sencillo es el que se da en la Fig. 10.25, en la que se comparan las funciones sen ωt y sen^2 ωt. Como esta última es también sinusoidal pero desplazada respecto al eje cero, vemos por simetría que su valor medio es $^1/_2$. Analíticamente se llega al mismo resultado, escribiendo la relación trigonométrica

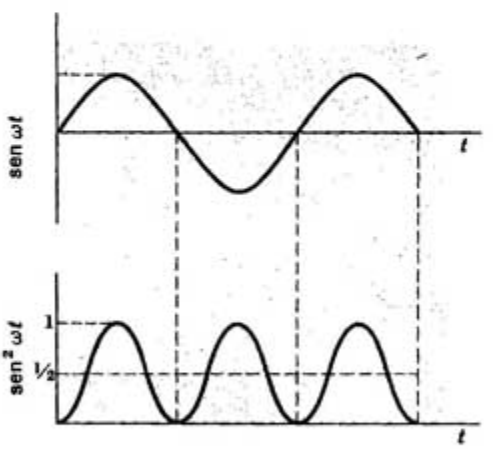


Fig. 10.25 Demostración gráfica de que $\operatorname{sen}^2 \omega t = {}^1/_2$.

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$$

Como el valor medio de cos $2\omega t$ es cero, se deduce inmediatamente el resultado de la Ec. (10.46).

Una vez tenemos este valor, el problema está resuelto; en efecto, podemos escribir

$$I_{ef}^2 = \frac{I_0^2}{2} \quad \text{o} \quad I_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 = 0{,}707\, I_0 \tag{10.47}$$

El mismo tipo de razonamiento conduce a

$$V_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_0 = 0{,}707\, V_0 \tag{10.48}$$

Estos valores eficaces de la intensidad y la tensión son los empleados normalmente, en especial cuando se trata de potencia de la corriente alterna.

Vamos a examinar ahora la influencia del ángulo de fase entre I_0 y V_0 sobre la potencia. Como ya sabemos en corriente continua, la potencia suministrada a un circuito que tiene aplicada entre sus extremos una tensión v y por el que pasa una intensidad i, viene dada por $P = iv$. En corriente alterna, si la tensión y la intensidad están en fase, vendrán dadas respectivamente por $v = V_0 \operatorname{sen} \omega t$ y por $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$. La potencia será $P = iv = I_0 V_0 \operatorname{sen}^2 \omega t$ y su valor medio será

$$P = I_0 V_0 \overline{\operatorname{sen}^2 \omega t} = \tfrac{1}{2} I_0 V_0 = I_{ef} V_{ef} \tag{10.49}$$

Por otra parte, si existe un ángulo de fase θ entre la intensidad y la tensión, de modo que

$$\begin{aligned} i &= I_0 \operatorname{sen} \omega t \\ v &= V_0 \operatorname{sen} (\omega t + \theta) \end{aligned} \tag{10.50}$$

entonces la potencia valdrá

$$P = iv = I_0 V_0 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \theta)\, dt \right] \tag{10.51}$$

Deberemos, pues, calcular la expresión entre paréntesis de caja, lo que nos dará el valor medio de la cantidad subintegral. Empleando una conocida relación trigonométrica, podemos escribir la Ec. (10.51) en la forma

$$\begin{aligned} P &= I_0 V_0 \left[\frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{sen} \omega t\, (\operatorname{sen} \omega t \cos \theta + \cos \omega t \operatorname{sen} \theta)\, dt \right] \\ &= I_0 V_0 \left[\frac{1}{t} \int_0^t (\operatorname{sen}^2 \omega t \cos \theta + \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t \operatorname{sen} \theta)\, dt \right] \end{aligned} \tag{10.52}$$

El segundo término tiene un valor medio cero, puesto que sen ωt cos ωt es simétrica respecto a cero, y sen θ es constante. Por tanto, encontramos

$$P = \tfrac{1}{2} I_0 V_0 \cos\theta = I_{ef} V_{ef} \cos\theta \tag{10.53}$$

De esto se deduce que la potencia media disipada en una autoinducción pura o en una capacidad pura son cero. El cos θ se llama *factor de potencia*.

10.10 Instrumentos de corriente alterna

Es demasiado esperar que un galvanómetro ordinario, debido a la inercia mecánica de su bobina, responda a las corrientes alternas. Vamos a examinar en esta sección los fundamentos de varios instrumentos de medida en corriente alterna basados en diferentes principios.

Amperímetro térmico. Este instrumento evita por completo el problema de que el par que aparece sobre una bobina situada en un campo magnético fijo se invierte al cambiar el sentido de la corriente. Está basado en el calentamiento de un hilo por la corriente. El hilo está sometido a una ligera tensión mecánica y al calentarse se alarga. Una aguja indicadora está conectada de modo que marque este alargamiento. Como podría esperarse este aparato no es útil para corrientes muy pequeñas. Como el calentamiento es proporcional a i^2, las divisiones para i no estarán igualmente espaciadas. Evidentemente puede emplearse también en corriente continua, pero no suele hacerse. En cambio, esto sirve para su calibrado, y las indicaciones obtenidas en corriente alterna son valores eficaces.

Electrodinamómetro. Es un dispositivo tipo galvanómetro en el que el campo magnético usual del imán permanente se sustituye por el campo producido por una corriente en una bobina auxiliar. Ambas bobinas se colocan en serie o en paralelo de modo que las variaciones de corriente en ambas son iguales. Como el campo magnético cambiará de este modo su sentido al mismo tiempo que la corriente en la bobina móvil, el par sobre ésta tiene siempre el mismo signo y la desviación es proporcional a su valor medio. Como el par es proporcional tanto a la intensidad que circula por la bobina móvil como al campo magnético, que a su vez depende de la intensidad de la corriente, el par resulta proporcional a i^2. El electrodinamómetro puede emplearse al igual que el galvanómetro tanto para medir intensidades como tensiones.

Cuando las dos bobinas se conectan separadamente, una para medir la intensidad que pasa por un sistema y la otra para medir la tensión que se le aplica, el aparato mide directamente la potencia. En la Fig. 10.26 se indica esquemáticamente la forma de operar.

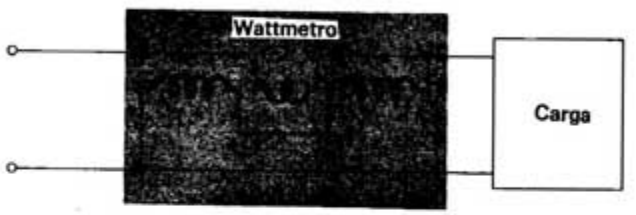


Fig. 10.26 Esquema de un wattmetro.

Aun cuando V e I no estén en fase, el aparato da la potencia correcta, puesto que el par es proporcional a $iv = I_0 V_0 \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} (\omega t + \theta)$, y como hemos visto, el valor medio de esta expresión es $^1/_2 I_0 V_0 \cos \theta$. Este tipo de vatiómetro puede usarse también en corriente continua. La sensibilidad de los aparatos electrodinámicos tiende a ser baja debido al valor relativamente bajo del campo magnético que se obtiene con las intensidades a medir comparado con el que proporciona el imán permanente en un galvanómetro.

Galvanómetro rectificador. En algunos casos se emplea un dispositivo rectificador, ordinariamente un cristal semiconductor, para obtener una corriente continua que es entonces medida por un galvanómetro ordinario. Más adelante discutiremos los rectificadores. Es suficiente destacar aquí que la tensión continua obtenida de este modo suele ser proporcional a la amplitud de la tensión alterna, con lo que el galvanómetro da una lectura proporcional a la amplitud de la tensión (o de la intensidad).

Oscilógrafo de rayos catódicos. Aunque este instrumento es de naturaleza bien distinta a la de los otros aparatos mencionados es de uso constante en los laboratorios para medir tensiones alternas, y en ocasiones también continuas. Hoy en día, que la televisión resulta familiar a todos con su tubo de rayos catódicos para formar la imagen, es probablemente innecesario dar muchos detalles, que por otra parte no tendrían cabida en el marco de este texto. Diremos, pues, únicamente algunas palabras. El corazón del oscilógrafo de rayos catódicos es un haz de electrones, procedente de un cátodo incandescente, que después de ser acelerado electrostáticamente se enfoca sobre un material fluorescente situado en la cara interior de la pantalla. La posición del haz se controla por medio de un campo electrostático o por el campo magnético producido en una bobina. La principal ventaja del aparato es la respuesta extremadamente rá-

pida del haz a la tensión aplicada al electrodo de señal. Así, es corriente poder ver señales cuya frecuencia es de varios megaciclos/seg. Además, el empleo de amplificadores electrónicos apropiados hace posible la observación fácil de señales de 10^{-3} voltios y aún menores. Aunque el osciló grafo no es un aparato de medida de tipo absoluto, puede calibrarse con facilidad, de modo que se obtienen las medidas directamente en voltios. Otra gran ventaja del aparato es su gran impedancia de entrada, por lo que toma muy poca corriente del circuito que se está midiendo y no introduce perturbaciones.

10.11 El transformador

Un transformador es un dispositivo que permite cambiar una tensión alterna sin pérdida apreciable de potencia. De este modo puede encenderse una lámpara de 6 voltios a partir de la red industrial de 127 voltios sin más que conectarla mediante un transformador apropiado; igualmente puede obtenerse una tensión de 10.000 voltios para un aparato de rayos X a partir de la misma red de 127 voltios con otro transformador. Si parte del flujo magnético, debido a la corriente que pasa por una bobina, atraviesa también otra bobina de modo que existe entre ellas una inductancia mutua, la pareja de bobinas puede emplearse como transformador. Sin embargo, lo que se pretende es conseguir tan aproximadamente como sea posible, que *todo* el flujo de una de las bobinas atraviese también la otra. Una forma de conseguir esto en la práctica es devanar ambas bobinas sobre un mismo núcleo ferromagnético cerrado (Fig. 10.27).

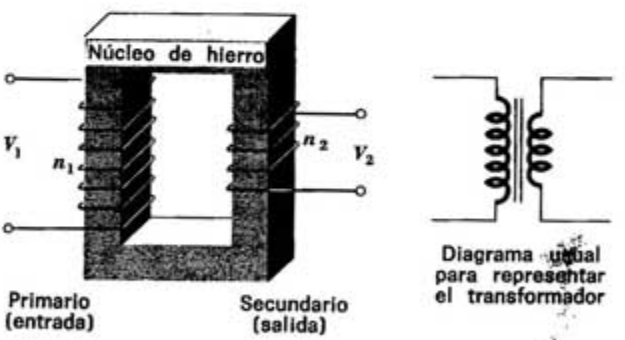


Fig. 10.27 Transformador.

Como ya hemos indicado anteriormente, el flujo tiende a quedar confinado dentro del material ferromagnético con lo que la inductancia mutua de las bobinas es máxima.

La relación de tensiones entre primario y secundario es precisamente la relación de espiras entre los devanados primario y secundario. Supongamos que la tensión alterna conectada al primario es

V_1. Si la resistencia de esta bobina es despreciable comparada con su reactancia inductiva, pasará por la bobina una intensidad i_1 que crea un flujo magnético alterno tal que la fem inducida sea justamente igual y opuesta a V_1; por tanto, tenemos

$$V_1 = -n_1 \frac{d\Phi}{dt} \tag{10.54}$$

siendo n_1 el número de espiras en el primario. Ahora bien, como todo el flujo atraviesa la bobina secundaria, resulta inmediatamente para la tensión de salida

$$V_2 = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} \tag{10.55}$$

en la que $d\Phi/dt$ tiene el mismo valor que en la Ec. (10.54).

Combinando estas ecuaciones, tenemos

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{n_1}{n_2} \tag{10.56}$$

Que es la ecuación básica del transformador que relaciona la razón de tensiones en los arrollamientos primario y secundario a la razón de espiras de los mismos.

Cuando no hay carga en el secundario, podemos determinar la amplitud y fase de la corriente en el primario expresando el flujo Φ en función de la fuerza magnetomotriz. Como vimos anteriormente,

$$\Phi = \frac{\text{fmm}}{\mathcal{R}} \tag{9.54}$$

siendo $\mathcal{R}$ la reluctancia del circuito magnético. Si la aplicamos al devanado primario, admitiendo que la corriente en él sea sinusoidal, obtenemos

$$\Phi = \frac{n_1 i_1}{\mathcal{R}} = \frac{n_1 I_0 \operatorname{sen} \omega t}{\mathcal{R}} \tag{10.57}$$

Por tanto, el flujo varía sinusoidalmente con el tiempo y tiene la misma fase que i_1. Si derivamos para tener $d\Phi/dt$, y sustituimos en la Ec. (10.54), resulta

$$V_1 = \frac{-\omega n_1^2 I_0 \cos \omega t}{\mathcal{R}} \tag{10.58}$$

Esto demuestra que i_1 y V_1 están desfasadas en 90°, como era de esperar de nuestros resultados anteriores para una autoinducción

pura. Según aquel razonamiento, como el factor de potencia es cero, no hay consumo de potencia. Asimismo, si la reluctancia del circuito magnético es pequeña, la amplitud de la intensidad I_0 es también pequeña. En la práctica hay en realidad alguna pérdida de energía debido a que el factor de potencia no es exactamente cero. Esto proviene de que la bobina tiene una resistencia finita, y de las pérdidas por histéresis y corrientes de Foucault en el núcleo de hierro. Sin embargo, estas pérdidas resultan muy pequeñas si se comparan con la potencia consumida normalmente por la carga conectada al secundario.

Vamos a examinar, pues, cómo cambia la situación cuando se conecta esta carga a la bobina secundaria de modo que pase una corriente secundaria i_2. Supondremos por simplicidad que se trata de una carga puramente resistiva, de modo que V_2 e i_2 tienen la misma fase. Como resultado de la corriente i_2 se produce un flujo magnético adicional en el núcleo. Según la ley de Lenz, este flujo se opone al flujo original debido a i_1, de modo que el flujo debería ser ahora.

$$\Phi = \frac{n_1 i_1}{\mathcal{R}} - \frac{n_2 i_2}{\mathcal{R}} \tag{10.59}$$

Pero el valor del flujo debe mantenerse constante, si ha de satisfacerse aún la Ec. (10.54) para la tensión en el primario. En efecto, si la frecuencia permanece constante, Φ y $d\Phi/dt$ son proporcionales. Por tanto, la consecuencia de introducir i_2 es que i_1 debe aumentar, y podemos escribir en lugar de (10.59)

$$\Phi = \frac{n_1(i_1 + i_1') - n_2 i_2}{\mathcal{R}} \tag{10.60}$$

siendo i_1' el incremento en la corriente primaria debido a la existencia de corriente en el circuito secundario. Comparando la Ec. (10.60) con la (10.57) nos da

$$n_1 i_1' = n_2 i_2 \tag{10.61}$$

Si despreciamos la corriente primaria sin carga, que como hemos dicho suele ser muy pequeña, llegamos a la relación

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} \tag{10.62}$$

esto es, que las intensidades de la corriente en el primario y el se-

cundario son inversamente proporcionales al número de espiras en primario y secundario. Las Ecs. (10.56) y (10.62) conducen a

$$V_1 i_1 = V_2 i_2 \tag{10.63}$$

que demuestra que la potencia a la entrada del transformador es igual a la potencia de salida. Con esto estamos despreciando las pérdidas, que en los transformadores ordinarios suelen ser de unas unidades por ciento. No haremos un estudio cuantitativo de las pérdidas en los transformadores, aunque sí vamos a indicar brevemente los esfuerzos realizados para conseguir reducir a un mínimo las pérdidas de Foucault. Como éstas aumentan con la frecuencia, el problema se hace más serio a frecuencias altas. En las aplicaciones ordinarias a 50 ciclos/seg, es suficiente normalmente construir el núcleo de hierro con láminas, como ya indicamos en la Sec. 8.12. Para frecuencias mayores, se consigue mantener las pérdidas a un valor suficientemente bajo empleando partículas de hierro finamente divididas en el seno de un aglomerante no-conductor. Finalmente, para frecuencias muy elevadas, se emplean ferritos (véase Sec. 9.10), que son materiales magnéticos aislantes.

10.12 Generadores

Ya vimos en los Ejemplos 8.5*a* y 8.8*c* la relación que existe entre la ley de inducción de Faraday y la operación de un generador eléctrico. Vamos a añadir aquí algunas discusiones sobre los detalles de construcción de los generadores de tipo práctico. Vimos en el Ej. 8.8*c* que una bobina giratoria en un campo magnético da corriente alterna. Para trabajar en corriente continua, se introducen usualmente dos modificaciones. La primera es el empleo de un *conmutador* para invertir las conexiones a la bobina en el instante adecuado con objeto de mantener la fem siempre en el mismo sentido, en la forma descrita al tratar de la bobina giratoria empleada como motor en el Ej. 8.8*d*. El resultado es una tensión continua en la salida, pero con un rizado superpuesto. Se puede progresar en este sentido, como indicamos en relación con los motores, construyendo un rotor constituido por muchas bobinas separadas, cada una de las cuales se conecta a la salida a través del conmutador, únicamente aquella parte del ciclo en la que su salida es aproximadamente máxima. La salida que así obtiene tiene mucho menos rizado, que si es necesario, puede reducirse aún más mediante circuitos de filtro externos. La segunda modificación importante es suministrar la corriente a las bobinas fijas, que establecen el campo magnético, de la salida de la armadura misma. Este es el generador *auto-excitado*. En la Fig. 10.28

se indican dos de las formas usadas para aplicar tensión a las bobinas de campo.

La conversión de energía mecánica en eléctrica por unidad de tiempo es $\mathcal{E}\, i_a$, siendo $\mathcal{E}$ la fem generada en las bobinas del rotor e i_a la intensidad que pasa por ellas. Esta afirmación supone despre-

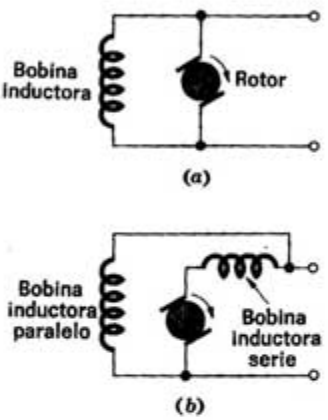


Fig. 10.28 Dos formas de excitación de las bobinas inductoras en los generadores de corriente continua: (a) excitación paralelo; (b) excitación compuesta.

ciar las pérdidas de energía en la resistencia de las bobinas que mantienen el campo magnético en el generador. En un generador bien proyectado estas pérdidas representan solo una pequeña fracción de la potencia convertida en energía eléctrica.

Los generadores de alterna se construyen, normalmente, en forma diferente. Las bobinas se disponen fijas alrededor de una serie de polos magnéticos giratorios. Estos polos son de hierro, y se mantienen magnetizados mediante una corriente continua que se hace llegar al rotor mediante unos anillos de fricción.

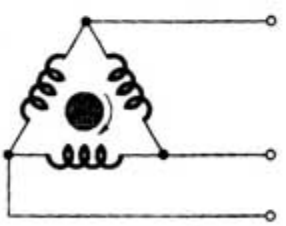


Fig. 10.29 Esquema aproximado de un generador de alterna trifásico. El campo magnético giratorio produce tensiones alternas entre cada par de terminales con diferencias de fase de 120°.

En muchas aplicaciones se disponen tres series de bobinas conectadas, como se indica en la Fig. 10.29, de modo que exista una tensión alterna entre cada dos de los tres terminales del generador. La fase de la tensión entre cada par es, sin embargo, diferente; las tres líneas procedentes del generador constituyen lo que se llama un sistema trifásico. Como puede deducirse

de la forma de disponer las bobinas, el ángulo de fase entre las tensiones es de 120°. Este sistema trifásico se emplea para los motores trifásicos especiales que discutiremos en la próxima sección.

En todos los generadores electromecánicos, la resistencia interna procede de la resistencia que presentan las bobinas en las que aparece la fem inducida. En el generador de excitación compuesta (véase Fig. 10.28*b*), un aumento de la corriente que pasa por la carga da lugar también a un aumento de la corriente magnetizante que pasa por la bobina inductora serie. El aumento resultante en el campo magnético compensa el descenso de la tensión de salida que en otro caso se presentaría al pasar una gran intensidad por el rotor, dando así una resistencia equivalente muy baja para un gran margen de corrientes.

Mencionaremos brevemente dos tipos de generadores electrostáticos. Uno, la máquina de Wimshurst, empleada ahora solamente como una máquina de alta tensión y potencia pequeña en laboratorios de prácticas. Constituye una versión mecanizada del electróforo descrito en la Sec. 1.5, en el que la carga se conseguía por un efecto de influencia. Un generador mucho más perfeccionado es el de Van der Graaf. En este aparato una correa aislante movida mediante un motor transporta las cargas eléctricas que se depositan sobre ella por medio de la descarga que aparece en las proximidades de unas puntas metálicas, hasta el interior de una gran esfera a la que pasan situándose sobre su superficie externa. En los modelos suficientemente grandes se han llegado a obtener tensiones hasta de 12 millones de voltios. Las máquinas más modernas, construidas para más de 1 millón de voltios, poseen una cubierta en la que se introduce un gas a presión para evitar la pérdida de carga que en el aire tendría lugar por efecto corona, debido al campo elevado que existe en las proximidades del conductor de alta tensión. Se puede conseguir que estas máquinas trabajen a tensión muy constante durante periodos de tiempo considerables, y, por tanto, se utilizan mucho en física nuclear cuando la energía en los procesos nucleares debe ser determinada con gran precisión. También tienen gran importancia en la producción de rayos X de alta energía.

10.13 Motores

En el Ej. 8.5*c* hemos visto cómo pueden emplearse las fuerzas magnéticas que aparecen sobre un conductor por el que circula corriente para convertir la energía eléctrica en mecánica. En el Ej. 8.8*d* hemos discutido la fuerza contraelectromotriz de un motor, que resulta de la variación de flujo al girar la bobina móvil. Estas son las ideas

fundamentales en un motor. Aquí añadiremos únicamente algunos detalles sobre la forma de operar los tipos más corrientes de motores.

El motor de corriente continua consiste, normalmente, en un rotor sobre el que existen un cierto número de bobinas que se conectan a la fuente de energía por medio de un conmutador. En los motores miniatura el campo magnético es producido mediante imanes permanentes, pero, en la mayoría de los motores, el campo se produce mediante electroimanes con bobinas por las que pasa corriente procedente de la misma fuente exterior.

En el motor excitado en paralelo estas bobinas se conectan en paralelo con las del rotor. La corriente en éste está dada por

$$V_s - \mathcal{E} = i_a R_a$$

siendo V_s la tensión de la fuente, $\mathcal{E}$ la fuerza contraelectromotriz media debida al movimiento de las bobinas del rotor en el campo magnético, y R_a e i_a la resistencia y corriente respectivamente en estas bobinas. La fuerza contraelectromotriz $\mathcal{E}$ es proporcional a Φf, siendo Φ el flujo magnético que atraviesa las bobinas en una revolución, y f el número de revoluciones por segundo. La velocidad con que se convierte la energía eléctrica en mecánica viene dada por $\mathcal{E} i_a$. También aquí despreciamos la potencia disipada en la resistencia de las bobinas inductoras que producen el campo, que es normalmente pequeña comparada con la potencia mecánica obtenida. Esta expresión para la conversión de potencia, es la misma que la de conversión de potencia mecánica en eléctrica en un generador. La potencia mecánica realizada por el motor es $P = \tau\omega$, siendo τ el par y ω la velocidad angular del motor. Si igualamos la potencia eléctrica que se convierte en mecánica a la potencia realizada, obtenemos

$$\mathcal{E} i_a = \tau\omega \propto \Phi f i_a = \frac{\Phi\omega}{2\pi} i_a$$

o sea

$$\tau \propto \frac{\Phi}{2\pi} i_a$$

Por tanto, en un motor excitado en paralelo, el par es proporcional a la corriente en los devanados del rotor.

En un motor excitado en serie, las bobinas inductoras y el rotor están en serie, con lo que la ecuación del circuito será

$$V_s - \mathcal{E} = (R_a + R_f) i_a$$

en la que R_f es la resistencia de las bobinas inductoras. El flujo magnético será aproximadamente proporcional a i_a, y, como el par

es proporcional a Φi_a, este último resultará proporcional a i_a^2. Este contraste entre el par en los motores de continua excitados en paralelo y excitados en serie, conduce a que el motor serie presente un par de arranque más grande, puesto que la corriente tomada varía solo con $\tau^{1/2}$ en vez de ser proporcional a τ.

Los motores de corriente alterna pueden construirse sobre los mismos principios que los de continua, como el par depende de Φi_a y ambos, Φ e i_a, cambian de signo a la frecuencia de la tensión alterna aplicada, el par tendrá siempre el mismo sentido. En un motor excitado en paralelo existe, sin embargo, la dificultad de que las fases de la corriente en las bobinas inductoras y en las del rotor no son iguales, ya que la autoinducción de estos devanados es diferente. Este problema no se presenta en el motor excitado en serie, puesto que necesariamente las corrientes están en fase. Sin embargo, la gran autoinducción de las bobinas limita considerablemente la corriente, y esto repercute en el par disponible con las tensiones de alimentación ordinarias. Además los núcleos de hierro de las bobinas inductoras han de ser laminados para evitar pérdidas excesivas por corrientes de Foucault.

El motor más corriente de alterna es el motor de inducción, en el que un campo magnético giratorio induce corrientes en una serie de espiras de cobre existentes en el rotor. Las fuerzas magnéticas sobre estas corrientes producen un par que obliga a girar al rotor. El campo giratorio puede obtenerse alimentando el motor mediante el sistema trifásico descrito en la sección anterior. Los devanados del motor son semejantes a los del generador. Cuando se conectan a las tres líneas de salida del generador, aparece en el motor un campo giratorio. Otro método para producir un campo giratorio, a partir de corriente alterna monofásica, es introducir una diferencia de fase en una parte de las bobinas inductoras conectando un condensador a estas bobinas. La intensidad del campo giratorio se incrementa si en el rotor se incluye un núcleo de hierro laminado; de esta manera se disminuye la reluctancia del circuito magnético. Este tipo de motor no es síncrono con el campo giratorio, puesto que si el rotor se mueve a la misma velocidad que el campo, no hay corrientes inducidas y, por tanto, no hay par. El motor de inducción simple tiene un par de arranque pequeño, pues las corrientes inducidas en el rotor cuando está parado son grandes y dan lugar a una gran fuerza contraelectromotriz en las bobinas inductoras, lo que reduce la corriente en éstas y, por tanto, el valor del flujo magnético. El par de arranque puede aumentarse introduciendo, mediante anillos con contactos deslizantes, una resistencia externa en serie con las bobinas del rotor durante el arranque.

Es posible construir un motor síncrono combinando unos bobi-

nados corrientes en el rotor, por los que pasa la corriente de origen externo, con algunas espiras en cortocircuito como en el motor de inducción. Sin carga, el rotor gira en sincronismo con el campo giratorio exactamente como lo haría un imán permanente. Cuando se conecta al motor un par resistente, el rotor se retrasa un cierto ángulo y se inducen corrientes alternas en las espiras en corto. La fuerza adicional que aparece sobre estas espiras mantiene el rotor en sincronismo con el campo giratorio, aunque con un cierto retraso de fase. Este par debido al efecto de inducción, será máximo cuando el retraso de fase sea de 90°. Si el par resistente llega a introducir un retraso mayor, el motor pierde el sincronismo.

PROBLEMAS

10.1 Una autoinducción de L henry y una resistencia de R ohms están conectadas en serie con una fuente de tensión alterna de valor $V = V_0$ sen ωt.

a) Determinar la intensidad i en el circuito y el ángulo de fase entre la tensión de la fuente y la intensidad. Explíquese el significado del ángulo de fase.

b) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la intensidad en la autoinducción y la intensidad en la resistencia?

c) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la tensión en extremos de la autoinducción y la existente en extremos de la resistencia?

d) Determinar la amplitud de la tensión V_R en extremos de la resistencia y la tensión V_L en extremos de la autoinducción.

e) Explíquese por qué $|V_R| + |V_L| \neq V_0$. Comprobar que se cumple la suma vectorial $\mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = \mathbf{V}_0$.

10.2 Sustituir la autoinducción del Prob. 10.1 por un condensador de C farads y responder a las mismas preguntas.

10.3 *a*) Calcular la reactancia inductiva a 60 ciclos/seg de una autoinducción de 2 h.

b) Calcular la reactancia capacitiva de un condensador de 50 μF a la misma frecuencia.

c) ¿A qué frecuencia tendrían el mismo valor las reactancias de estos dos elementos?

d) Representar en forma cualitativa la curva de variación con la frecuencia de la reactancia de ambos elementos.

10.4 Una bobina circular formada por N espiras muy próximas, tiene un área A y gira alrededor de uno de sus diámetros, que es perpendicular a un campo magnético uniforme de inducción B, con una velocidad $\omega = 2\pi f$. La bobina tiene una autoinducción L y está conectada a una resistencia exterior R.

a) Escribir la expresión que da el flujo de inducción magnética que atraviesa la bobina en función del ángulo $\theta = \omega t$ que forma el plano de la bobina con la dirección de B.
b) Dar la expresión de la fem inducida en la bobina.
c) ¿Cuál es la amplitud de esta fem?
d) Calcular la corriente en la bobina.
e) Hallar el ángulo de fase entre la fem inducida y la intensidad explicando su significado.
f) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la tensión en extremos de la resistencia exterior y la corriente que la atraviesa?
g) ¿Cuál es el ángulo de fase entre la tensión en extremos de la bobina y la corriente a su través?

10.5 Una tensión de amplitud 120 volts y frecuencia 60 ciclos/seg está aplicada a una resistencia pura de 20 ohms. ¿Cuál es el valor eficaz de la tensión aplicada? Determinar la máxima intensidad, sus valores medio y eficaz y la potencia disipada.

10.6 A una inductancia pura de 0,2 henry se le aplica una tensión de 400 ciclos/seg y amplitud 120 volts. ¿Cuál es el valor de la intensidad máxima, la intensidad media, la intensidad eficaz y la disipación de potencia?

10.7 Se aplica una tensión de 60 ciclos/seg a una resistencia de 400 ohms en serie con un condensador de capacidad desconocida. Un voltímetro de alterna mide 80 volts entre los terminales de la fuente y un amperímetro de alterna (de resistencia despreciable) intercalado en el circuito indica 0,1 amp. Calcular:
a) Impedancia del circuito.
b) Potencia disipada.
c) Valor del condensador.

10.8 Demostrar que el valor medio de una corriente alterna sinusoidal durante el semiciclo positivo es $2I_0/\pi$, siendo I_0 la amplitud de la intensidad.

10.9 Calcular el valor eficaz de una tensión dada por la expresión

$$V = 50 \operatorname{sen} \omega t + 20 \operatorname{sen} 2\omega t$$

10.10 El circuito serie indicado en la Fig. P 10.10 está sometido a una tensión alterna de amplitud V_0.

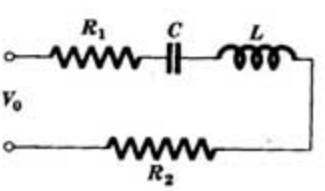


Fig. P 10.10

a) ¿Para qué frecuencia la intensidad que pasa por el circuito será máxima?
b) ¿Cuál será el valor de esta intensidad máxima?
c) ¿Para qué frecuencias tendrá la intensidad el valor mitad del máximo?
d) ¿Para qué frecuencias será mínima la intensidad?

10.11 Al circuito paralelo indicado en la Fig. P 10.11 se le aplica una tensión alterna de amplitud V_0.
a) ¿Para qué frecuencia la intensidad en el condensador C tiene el mismo valor que la intensidad en la autoinducción L?
b) ¿Para qué frecuencia la intensidad a través de la fuente de alterna será máxima, y para cuál mínima?
c) ¿Para qué frecuencias la intensidad que pasa por la fuente tendrá un valor doble del mínimo?

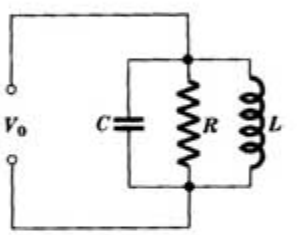


Fig. P 10.11

10.12 El interruptor existente en el circuito de la Fig. P 10.12 se cierra en el instante $t = 0$.
a) Dibujar cualitativamente la variación con el tiempo de la diferencia de potencial V_R entre extremos de la resistencia. Sobre los mismos ejes representar la variación de V_L, tensión entre extremos de la autoinducción. Sumar gráficamente las dos curvas.
b) ¿En qué instante $V_R = V_L$?
c) ¿Cuál es la constante de tiempo de este circuito?

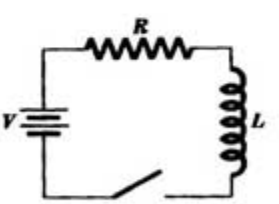


Fig. P 10.12

10.13 Supóngase que después de haber permanecido cerrado durante un tiempo muy largo comparado con la constante de tiempo del circuito, se abre el interruptor de la Fig. P 10.12 de modo casi instantáneo. Dibujar cualitativamente cómo varían V_R y V_L con el tiempo. ¿Existirá alguna limitación en la velocidad con que la intensidad puede reducirse a cero?

10.14 *a*) Calcular en el circuito de la Fig. P 10.14 el tiempo que transcurre desde que se cierra el interruptor hasta que $V_R = V_C$.

b) ¿Cuál es la intensidad máxima que puede circular, y en qué instante tiene lugar dicho máximo?

c) ¿Cuál es la carga máxima del condensador y cuándo la adquiere?

d) Demostrar que la intensidad en el circuito se reduce a la mitad de su valor inicial en el mismo instante en que la carga del condensador es la mitad de su valor final. ¿Cuál será este instante a partir del momento de cierre?

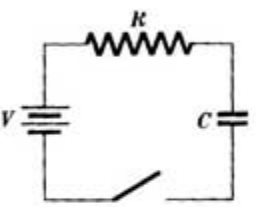


Fig. P 10.14

10.15 Una bobina de autoinducción 10 h y resistencia 100 ohms se conecta a una batería de 20 volts. ¿Qué resistencia debe conectarse en paralelo con la bobina para evitar que la tensión en los extremos de ésta se haga mayor de 100 volts en el momento en que se desconecte la batería? ¿Cuál es la velocidad inicial con que disminuye la intensidad en la bobina?

10.16 Proyectar un filtro pasa-alta sencillo tal que la tensión de salida sea la mitad de la de entrada para una frecuencia de 400 ciclos/seg (véase Fig. 10.22). Suponer que el circuito filtro se usa para alimentar un circuito de impedancia mucho mayor.

10.17 Un transformador, tal como el que se indica en la Fig. P 10.17, tiene n_1 espiras en el primario y n_2 en el secundario. El 60 por 100 del flujo magnético debido a la intensidad en el primario pasa por el camino A. Calcular la relación entre la tensión en el primario y la tensión en el secundario sin carga.

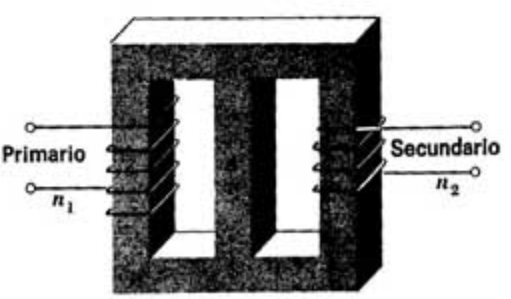
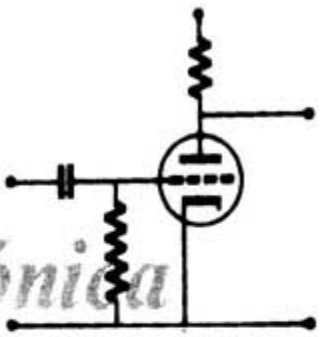


Fig. P 10.17

ONCE

Electrónica



11.1 Introducción

En este capítulo vamos a referirnos brevemente a las características básicas de tres elementos que, en la electrónica práctica, tienen importancia primaria: la válvula de vacío, el transistor y el klinstrón. La válvula de vacío y el transistor funcionan de un modo básicamente similar; la intensidad que los atraviesa puede ser controlada por medio de una señal eléctrica. Todo el campo de la electrónica depende de las características de esta influencia. Los numerosos tipos de válvulas de vacío y de transistores que existen, permiten la construcción de una gran variedad de circuitos electrónicos que realizan las funciones más diversas. En este lugar solo discutiremos su estructura básica y algunas aplicaciones típicas. El klinstrón se estudia como ejemplo de dispositivos que pueden trabajar a frecuencias mucho más elevadas que las válvulas de vacío ordinarias. Constituye una de las fuentes más importantes de señales en el intervalo de frecuencias de las microondas, que están adquiriendo cada vez más importancia en el campo de las telecomunicaciones. La posibilidad de disponer de energía eléctrica en estas frecuencias elevadas, ha contribuido también al desarrollo de muchos campos de investigación en la física.

11.2 La válvula de vacío

La principal función de las válvulas de vacío es controlar la intensidad de la corriente en un circuito. Este control es posible sin tener que invertir una cantidad apreciable de energía. Como consecuencia, puede emplearse una válvula de vacío para amplificar una señal de corriente alterna o para trabajar como oscilador en un circuito apropiado, generando así una señal de corriente alterna a partir de una fuente de energía de corriente continua. En una válvula de vacío, un *cátodo* incandescente situado en el vacío emite, por efecto termoiónico, electrones continuamente, y estos electrones constituyen una corriente negativa que llega hasta una *placa* o *ánodo*, mantenida a un potencial positivo respecto al cátodo. El control de la intensidad de esta corriente se consigue por medio de una o varias *rejillas*, cuyo potencial está determinado a su vez por el circuito exterior. Comenzaremos nuestra discusión con algunas consideraciones sobre la relación entre la corriente de electrones y la tensión aplicada entre el ánodo y la placa.

La intensidad de la corriente electrónica en la válvula está limitada en principio por el número de electrones por segundo emitidos por el cátodo, que depende de la temperatura del mismo. Sin embargo, en la práctica, el factor más importante es la *carga espacial* existente en la región catódica. El efecto de esta carga puede explicarse cualitativamente en la forma siguiente: En ausencia de emisión electrónica, existe un campo determinado junto al cátodo debido a la diferencia de potencial aplicada entre placa y cátodo. Cuando el cátodo emite electrones, este campo eléctrico los acelera hacia la placa; pero la existencia de gran número de electrones en las proximidades del cátodo, hace disminuir el potencial en esta región, y, como consecuencia, en el campo; lo que permite que se acumulen más electrones aún junto al cátodo. Este proceso continúa hasta el punto de que el campo en la superficie del cátodo llega a ser de sentido opuesto. Se alcanza el estado estacionario, cuando los electrones son emitidos por el cátodo con la energía justamente necesaria para vencer este campo retardador, la corriente en estas condiciones se dice que está *limitada por la carga espacial*. Un análisis cuantitativo sencillo de la situación, pero que no vamos a desarrollar aquí, demuestra que la intensidad de esta corriente es proporcional a $V^{3/2}$, siendo V la diferencia de potencial entre placa y cátodo. Esta relación es válida con bastante aproximación para cualquier forma geométrica del cátodo. Señalemos que, como consecuencia, la válvula de vacío no se comporta como una resistencia óhmica, puesto que la intensidad no es proporcional a la tensión aplicada.

Vamos a estudiar primero las propiedades de los *diodos* de vacío, válvulas que solo tienen placa y cátodo y que se emplean prin-

cipalmente como *rectificadores*. En la Fig. 11.1 se da el esquema de un circuito sencillo en el que se emplea un diodo como *rectificador de media onda*. En este circuito la entrada, una tensión alterna, se convierte en una corriente que pasa por la carga siempre en el mismo sentido. En la figura se ha indicado el cátodo calentado indirectamente por medio de un filamento conectado a una fuente externa de baja tensión, normalmente un transformador. De este modo se

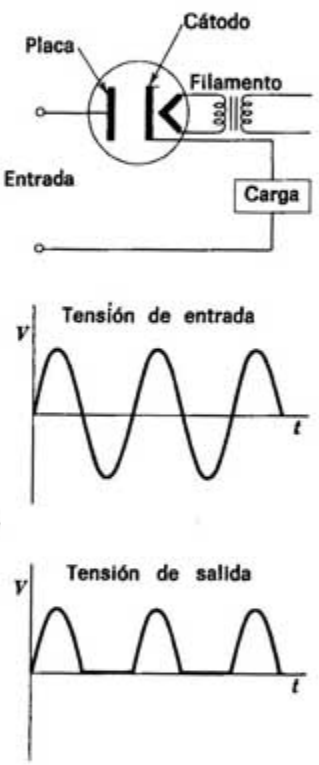


Fig. 11.1 Rectificador de media onda.

consigue que el cátodo alcance la temperatura suficiente para que emita electrones. El cátodo mismo se suele recubrir con un óxido metálico que reduce la temperatura necesaria para que la emisión sea apreciable. Siempre que la placa es positiva respecto al cátodo, los electrones emitidos por el cátodo son atraídos por la placa, dando lugar a una corriente que según el convenio usual en electricidad va de la placa al cátodo. Por tanto, durante los semiciclos de la tensión alterna en que la placa es positiva, pasa corriente a través del diodo. Por el contrario, en el semiciclo negativo no puede pasar corriente alguna, puesto que los electrones son repelidos por la tensión negativa de la placa. El resultado es que en la señal de salida faltan los semiciclos negativos. El valor medio de esta onda rectificada ya no es cero y si se dispone un filtro adecuado a continuación

puede obtenerse una tensión continua. El filtro más sencillo consistiría en conectar un condensador entre los terminales de salida.

En la Fig. 11.2 se indica el esquema de un circuito rectificador de onda completa que emplea un transformador con toma central. Las dos válvulas necesarias están frecuentemente situadas dentro de la misma ampolla e incluso comparten un mismo cátodo. También se

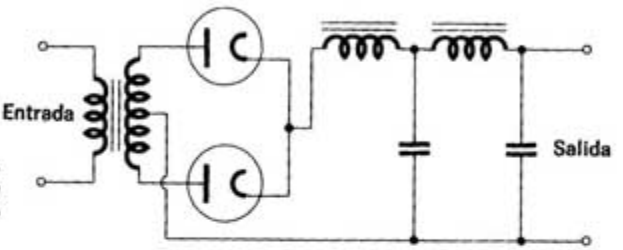


Fig. 11.2 Rectificador de onda completa, con transformador de toma central y filtro de salida. Los filamentos de los cátodos no se han representado.

incluye un filtro más complicado que se emplea para reducir al mínimo el rizado de alterna superpuesto. En semiciclos alternos la corriente pasa por aquella válvula cuya placa tenga un potencial positivo, mientras que la otra deja de conducir. En el diagrama se han omitido las conexiones de los filamentos de calefacción. Son circuitos rectificadores de este tipo los que proporcionan las tensiones continuas que requieren los amplificadores, osciladores y otros aparatos electrónicos.

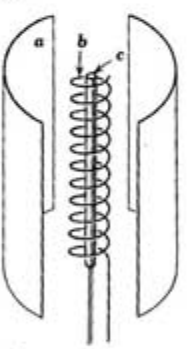


Fig. 11.3 Válvula de vacío triodo. (a) Cátodo calentado indirectamente, (b) rejilla en forma de espiral, y (c) placa.

En un *triodo*, dibujado esquemáticamente en la Fig. 11.3, se sitúa entre cátodo y placa una rejilla de control. Esta rejilla está formada por una malla de hilo poco tupida que permite pasar la mayoría de los electrones que viajan hacia la placa positiva. Sin embargo, si se aplica a la rejilla un potencial negativo (respecto al cátodo), el campo eléctrico introducido modifica la carga espacial y tiende a evitar que los electrones alcancen la placa, reduciendo, por tanto, la intensidad de la corriente. Por consiguiente, es posible controlar la intensidad de la corriente de placa, desde cero a un cierto valor máximo, cambiando el potencial de la rejilla. Como prácticamente la rejilla no toma corriente, este control puede hacerse con un consumo de potencia eléctrica muy pequeño. En la Fig. 11.4 se da una gráfica de la intensidad de la corriente de placa en función de la tensión de

rejilla, cuando se mantiene constante la tensión de placa. Esta gráfica indica que, aun cuando la rejilla sea muy negativa respecto al cátodo, llega algo de corriente a la placa. Esto es debido en parte a

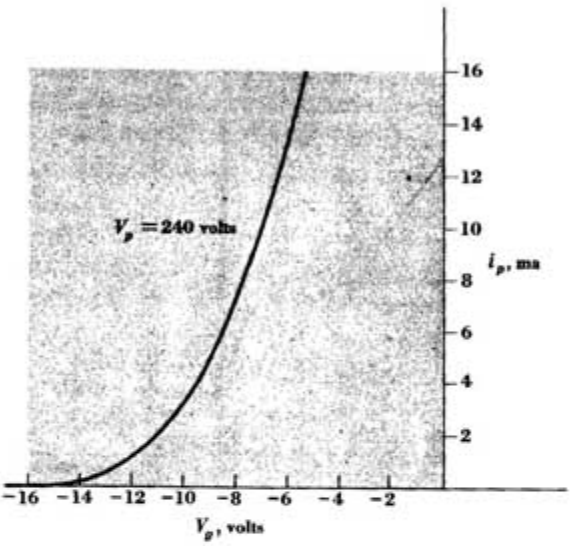


Fig. 11.4 Intensidad de la corriente de placa en función de la tensión de rejilla en un triodo. La tensión de placa se mantiene constante.

la estructura de la rejilla, que permite que algunas líneas de fuerza penetren a través suyo desde la placa al cátodo, aunque la rejilla sea negativa. Además, los electrones son emitidos por el cátodo con una cierta energía cinética, que les hace capaces de vencer un campo retardador. En la Fig. 11.5 se han dibujado las características más

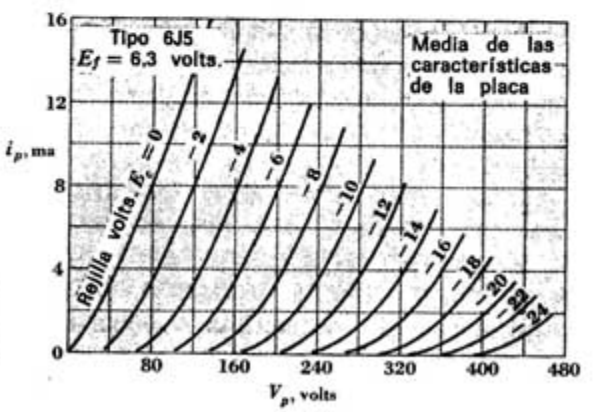


Fig. 11.5 Intensidad de placa del triodo frente a tensión de placa para distintas tensiones de rejilla. (Del RCA Receiving Tube Manual, Copyright 1950, Technical Series RC16, Fig. 92CM-4771T, pág. 147.)

usuales de un triodo. De ellas puede deducirse inmediatamente la Fig. 11.4. La intensidad que atraviesa la válvula depende tanto de la tensión de rejilla como de la de placa.

En la Fig. 11.6 se indica el esquema de un circuito típico en el que el triodo se emplea como amplificador de una señal alterna. Vamos a utilizarlo para dar una imagen cualitativa del proceso de amplificación. Consideremos una señal de alterna (no necesariamente sinusoidal), que tenga, por ejemplo, una amplitud media de 0,1 voltios. Si la reactancia $1/C_g\omega$ es muy pequeña comparada con

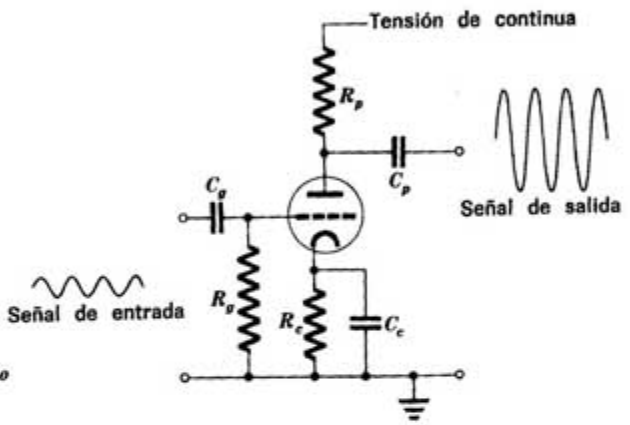


Fig. 11.6 Triodo empleado en un circuito amplificador típico.

la resistencia de rejilla R_g, la mayor parte de la tensión aplicada aparecerá a través de R_g, y, por tanto, en la rejilla de la válvula. La resistencia del cátodo R_c y la resistencia de la placa R_p se han elegido para situar la válvula en su zona de operación conveniente (en la que la intensidad es más sensible a las variaciones de la tensión de rejilla). El condensador C_c en paralelo con la resistencia del cátodo, es lo bastante grande para mantener el cátodo a una tensión prácticamente constante a pesar de las rápidas variaciones de la intensidad a través de la válvula producidas por la señal aplicada. Esto es, la constante de tiempo R_cC_c del circuito es grande comparada con el periodo de la señal de alterna. La pequeña señal de rejilla produce variaciones en la intensidad de placa, y, esto, hace que cambie la caída de tensión en la resistencia de placa R_p. La señal de alterna que aparece como consecuencia en la salida llega a ser unas cien veces mayor que la señal de entrada, por ejemplo, 10 voltios. Disponiendo en serie varias etapas, una tras otra, pueden obtenerse amplificaciones muy grandes.

En la Fig. 11.7 se indica el esquema de un circuito oscilador. Un circuito *tanque*, que consiste en un condensador y una bobina, y que tiene una frecuencia propia de oscilación, realimenta una pequeña fracción de la señal a la rejilla de entrada. Si la fase de esta señal es correcta, la subsiguiente variación en la corriente que pasa por la válvula refuerza las oscilaciones en el circuito tanque y éstas llegan a ser oscilaciones mantenidas. Existen muchos otros tipos de

circuitos osciladores, pero en todos los casos la función de la válvula es suministrar al circuito oscilante la energía necesaria para compensar las pérdidas que de otro modo harían que dejara de oscilar.

Las válvulas de vacío más complicadas llevan otras rejillas que modifican sus características y permiten otras aplicaciones. Aunque tienen gran importancia en los aparatos electrónicos, no vamos a

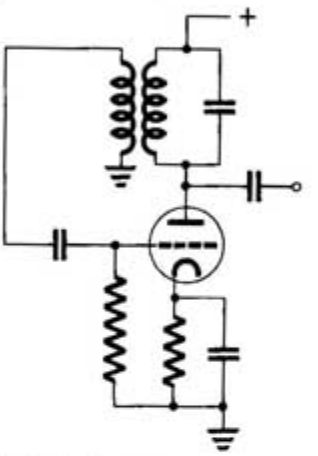


Fig. 11.7 Triodo empleado en un circuito oscilador auto-excitado.

considerar aquí estas válvulas, entre las que figuran los tetrodos y pentodos. También omitiremos toda discusión sobre otras válvulas de tipo especial como las de haz electrónico y las válvulas que contienen un gas en vez del vacío como los tiratrones y los reguladores de tensión. Los lectores interesados pueden por sí mismos informarse de las características de la multitud de tipos de válvulas que existen en cualquiera de los manuales sobre válvulas fácilmente accesibles. Aquí ha sido nuestro único propósito dar una brevísima descripción cualitativa de los principios en que se basan.

11.3 Transistores

El transistor fue desarrollado por primera vez en 1948, y ha llegado a alcanzar gran importancia como sustituto de las válvulas de vacío en muchas aplicaciones. Como en los transistores influyen muchas de las propiedades eléctricas más importantes de los semiconductores, vamos a discutirlas aquí brevemente. Su principal ventaja sobre las válvulas es su pequeño tamaño y que carecen de cátodo incandescente. Comenzaremos por dar una descripción breve y necesariamente aproximada de un semiconductor, el material con que están construidos los transistores y diodos de cristal.

Al intentar describir las propiedades de un semiconductor, nos enfrentamos de nuevo con la dificultad de que algunas de sus propiedades más importantes solo pueden ser explicadas con la mecá-

nica cuántica como base. Como en nuestra anterior discusión sobre los metales, nos limitaremos simplemente a dar los resultados de la teoría sin probarlos. Comenzaremos por señalar el contraste entre el comportamiento de los metales y el de los semiconductores. Habíamos visto anteriormente que en un metal los electrones de conducción llenan completamente los niveles de energía permitidos hasta un cierto nivel máximo W_F. Por encima de este límite existen niveles permitidos, pero salvo por unos pocos electrones excitados térmicamente, estos niveles no están ocupados. Sin embargo, para que ocurra el proceso de conducción es esencial la existencia de estos niveles vacíos. Supongamos, por ejemplo, que en una sustancia existe una banda de niveles permitidos completamente llena de electrones, y que, por encima de ella, existe una banda de energías en la que no hay niveles permitidos. En tal sustancia no pasa corriente alguna cuando se aplica un campo exterior. Para que los electrones puedan ser acelerados por el campo exterior y contribuyan, por tanto, a la conducción, deben ser capaces de pasar a niveles de energía más altos. Pero como *todos* los niveles están ocupados, y en cada estado no puede haber más que un solo electrón (contando como estados diferentes los de dos electrones con spin opuesto), el único proceso permitido es un intercambio entre dos electrones situados en estados diferentes. Este proceso no hace cambiar la cantidad de movimiento total del sistema de electrones y, por consiguiente, no da lugar a conducción. Una sustancia de este tipo debe ser clasificada como aislante. Un semiconductor se diferencia en que existe otra banda de niveles de energía permitidos que normalmente están desocupados; esta banda está separada de la banda inferior ocupada por una región en la que normalmente no hay estados electrónicos permitidos. En la Fig. 11.8 se han representado esquemáticamente estas situaciones.

Fig. 11.8 Bandas de energía para: (a) un metal, (b) un aislante, y (c) un semiconductor. La energía se ha tomado en ordenadas.

Con este modelo se explica fácilmente el comportamiento de los semiconductores. Si la banda prohibida W_g es lo bastante ancha, las energías térmicas ordinarias o los campos exteriores, no son capaces de alterar la posición de los electrones en la banda ocupada, y el material no puede ser conductor. Sin embargo, si existe algún mecanismo que pueda suministrar a los electrones de la parte superior de la banda ocupada, la energía W_g, estos electrones pueden pasar a alguno de los niveles permitidos vacíos de la banda superior, donde pueden contribuir a la conducción pasando a distintos niveles de esta banda por efecto del campo exterior. Además, cada electrón excitado a la banda superior, llamada *de conducción*, deja tras de sí un estado permitido vacío. Como los electrones de la banda inferior pueden ahora también cambiar de energía intercambiando su posición con este estado desocupado, la presencia de estos niveles desocupados en la banda inferior, llamada *de valencia*, permite también la conducción. Vamos a concentrar nuestra atención en el movimiento equivalente de estos niveles desocupados, y atribuiremos este tipo de conducción, al movimiento de *huecos* en la distribución de energía.

Como vemos, es posible describir el curso de los acontecimientos ya sea en términos de paso de los electrones de un estado permitido a otro, ya en términos de movimiento real de los electrones de una posición espacial a otra. Esto es permisible porque cuando cambia la energía de un electrón, cambian también su ímpetu y su velocidad; esto da lugar a un cambio en la cantidad de movimiento total de la banda de electrones que conduce a un desplazamiento neto de las posiciones de los electrones en el espacio.

Cuando se calienta un semiconductor a una temperatura suficientemente alta, algunos electrones son excitados térmicamente a la banda de conducción, dejando huecos en la de valencia, y la conducción tiene lugar gracias al movimiento de los electrones en la banda de conducción y al movimiento de los huecos en la de valencia. Otro procedimiento de provocar la conducción es el de irradiar el material con una radiación cuyos cuantos de energía sean mayores que W_g, en cuyo caso esta radiación puede excitar electrones a la banda de conducción dejando huecos atrás. Los huecos se comportan como portadores de carga positiva, puesto que su movimiento equivalente en el espacio es opuesto al movimiento neto de los electrones con los que intercambia su posición. El estado excitado, así obtenido, no es un estado de equilibrio, y existe una tendencia a que los electrones vuelvan a caer a la banda de valencia y se recombinen con los huecos.

Hasta aquí nos hemos referido a un semiconductor ideal que no tenga impurezas, la presencia de átomos extraños puede alterar el

comportamiento del semiconductor de modo muy importante. Vamos a describir esta influencia utilizando el Ge o el Si, como ejemplo. Estos elementos del grupo IV del sistema periódico, forman estructuras cristalinas iguales a la del carbono en el diamante. Para nuestros actuales propósitos la característica más importante de la red del diamante es que cada átomo tiene otros cuatro como vecinos más próximos. Cada átomo comparte sus cuatro electrones de valencia con estos cuatro átomos próximos, dando lugar a un enlace covalente con cada uno de ellos, como se indica esquemáticamente en la Fig. 11.9. En este modelo se presenta a los electrones de valencia localizados entre cada par de átomos. Los estados de energía de estos electrones forman precisamente la banda de valencia del sólido. La excitación de uno de estos electrones a un estado en el que ya no está ligado y el estado vacante que deja donde estaba, es lo que constituye el electrón en la banda de conducción y el hueco en la de valencia, respectivamente.

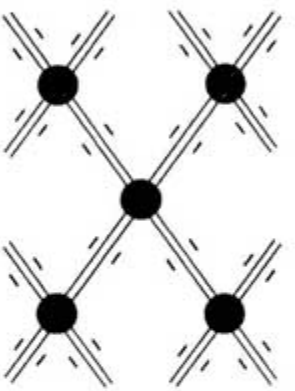


Fig. 11.9 Representación esquemática de los átomos en un cristal de silicio, indicándose los cuatro átomos vecinos a cada uno. La red verdadera es tridimensional. Se han representado los enlaces debidos a un par de electrones.

Consideremos el efecto de dos tipos de impurezas, en forma de átomos que se introducen en el cristal remplazando a alguno de los átomos de Ge o Si, de la red. En primer lugar, supongamos que se trata de átomos del grupo V, como P, As o Sb. Como poseen cinco electrones de valencia en lugar de los cuatro del Ge o Si, será necesario en las proximidades del átomo un electrón para mantener la neutralidad además de los cuatro que se necesitan para formar los enlaces. Este electrón extra se halla ligado al átomo-impureza exclusivamente por la fuerza de atracción coulombiana del núcleo, y queda mucho menos ligado que los electrones que participan en los enlaces entre los átomos. Como consecuencia, los electrones *extra* aportados por los átomos-impureza del grupo V pueden ser llevados a la banda de conducción mediante la absorción de energías mucho más pequeñas que las requeridas para elevar los electrones de la banda de valencia. En la Fig. 11.10 se indica esquemáticamente la

situación. Los niveles electrónicos debidos a los átomos-impureza se indican cerca de la parte superior de la banda de energías prohibidas. A temperaturas bajas, estos niveles están ocupados por electrones, pero bastan energías relativamente pequeñas para que sean excitados pasando a la banda de conducción. Estos niveles de energía adicionales, debidos a las impurezas, se llaman niveles *dadores*, y el material en el que se ha introducido este tipo de átomos, se llama semiconductor tipo *n* (de negativo).

Por otra parte, cuando se introducen en sitios ocupados normal-

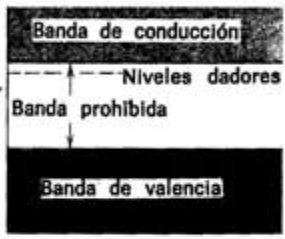


Fig. 11.10 Bandas de energía en un semiconductor tipo n.

mente por los átomos de Ge o Si, átomos del grupo III del sistema periódico, tales como Al, Ga o In, la situación se invierte. Esto es, la neutralidad eléctrica exige un electrón menos de los necesarios para completar los enlaces entre el átomo-impureza y sus vecinos normales. Exige relativamente poca energía el arrancar un electrón de un enlace adyacente y situarlo en el enlace del átomo-impureza en que falta un electrón. De hecho, este proceso equivale a la creación de un hueco. En la Fig. 11.11 se indica esta situación. Cuando

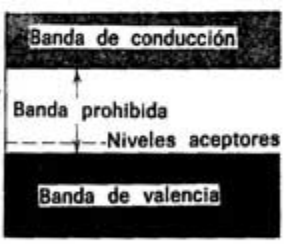
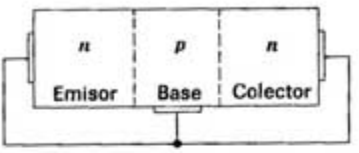


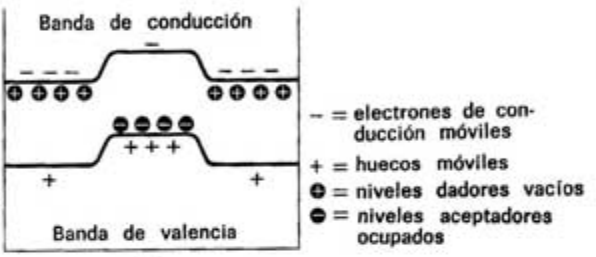
Fig. 11.11 Bandas de energía en un semiconductor tipo p.

los niveles *aceptores* de los átomos-impureza están ocupados por electrones excitados, quedan huecos en la banda de valencia y puede aparecer conductividad gracias a los huecos. Este tipo de material se llama semiconductor tipo *p* (de positivo).

Un tipo importante de transistores presenta una estructura de capas, en la que una capa delgada de material tipo *p* separa dos regiones de material tipo *n*. Son los llamados transistores *n-p-n*, y vamos a discutir a continuación cómo funcionan. Unos contactos existentes en la superficie de las regiones *emisor*, *base* y *colector* permiten el paso de electrones entre el material y el circuito exterior. En



(*a*)



(*b*)

Fig. 11.12 (a) Transistor de unión n-p-n; (b) energías electrónicas en un transistor de unión n-p-n sin tensiones aplicadas.

la práctica la región *p* es extremadamente delgada. Es preciso destacar dos hechos para que sea más fácil entender el modo de operar estos elementos. El primero es que nos encontramos ante una situación de equilibrio dinámico en ambos tipos de material *n* y *p*. Como consecuencia, en las regiones tipo *n* los electrones están siendo continuamente excitados por las vibraciones térmicas desde los niveles dadores a la banda de conducción al mismo tiempo que otros electrones están volviendo a los niveles dadores. En la región tipo *p* hay un flujo de electrones hacia los niveles aceptores, y, desde ellos, hacia los huecos en la banda de valencia. Los niveles dadores ocupados son eléctricamente neutros, mientras que los desocupados tienen asociada una carga positiva. Los niveles aceptores ocupados tienen carga negativa, mientras que los vacíos son neutros. El segundo hecho es que cuando se ponen en contacto un material tipo *n* y otro tipo *p*, existe un flujo neto de electrones desde el material tipo *n* al *p* y un flujo similar de huecos desde el material tipo *p* al *n*, hasta que se establece un campo suficiente para que se alcance el equilibrio. Este flujo resulta del movimiento de difusión de los huecos en la banda de valencia y de los electrones en la banda de conducción. La difusión da lugar a un intercambio neto de carga por el hecho de que casi todos los electrones de conducción se originan en la región tipo *n* y casi todos los huecos se originan en la región tipo *p*.

En la Fig. 11.12 se indica el tipo de distribución del potencial que resulta cuando las tres regiones se mantienen sin aplicar ninguna tensión exterior. En las regiones tipo *n* existen electrones de conducción y niveles dadores vacíos positivamente cargados, en la región *p* hay niveles aceptores ocupados, con carga negativa, y huecos

móviles. El transporte neto de cargas debido a la difusión da lugar a una capa de dipolos en cada una de las uniones. En el diagrama se indica que ha tenido lugar difusión de cargas, al representar un solo electrón de conducción en la región tipo *p* y un solo hueco en las regiones tipo *n*. En cada región existe constantemente recombinación de electrones y huecos, que es compensada exactamente por las corrientes de difusión. En el diagrama indicado la energía de los electrones aumenta hacia arriba, mientras que la energía de los huecos aumenta hacia abajo.

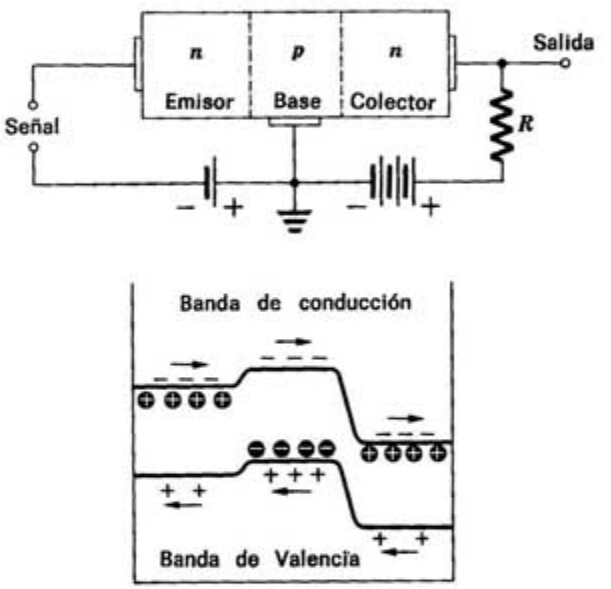


Fig. 11.13 Energías electrónicas en un transistor n-p-n con tensiones aplicadas.

En la Fig. 11.13 se indica cómo se modifica esta situación cuando se aplican tensiones exteriores. Bajo la influencia de los campos aplicados los electrones de la región *n* (emisor) pueden difundirse más fácilmente hacia la derecha hasta la base; una vez entran en esta región el campo aplicado los impulsa hacia el colector. La mayor parte de la tensión aplicada aparece en las regiones de transición entre las regiones *n* y *p* debido a que presentan una resistividad mucho mayor que la propia de los materiales *n* y *p*. La introducción de una señal eléctrica en el emisor controla el flujo de electrones de forma semejante a la acción de la rejilla de un triodo. Al mismo tiempo, existe una contracorriente de huecos hacia la izquierda; estos huecos se combinan con electrones en el electrodo emisor con lo que pasa una corriente de electrones. Como tanto la dirección de flujo como la carga son opuestas, para los huecos y los electrones, ambos tipos de portadores dan lugar a corriente en el mismo sentido. La señal amplificada se obtiene gracias a la variación de co-

rriente que tiene lugar a través de la resistencia R. Aunque no es éste el único tipo de transistor que existe, su descripción resulta suficiente para dar una idea de sus principios de funcionamiento. En todos los casos, se aprovecha la generación térmica de portadores de carga en un semiconductor con un cierto contenido de impurezas.

Otro dispositivo semiconductor muy importante es el diodo de cristal. Su historia es mucho más larga que la del transistor, aunque actualmente se emplean uniones *p-n* como en los transistores. En cualquier caso, los diodos de cristal permiten el paso de la corriente mucho más fácilmente en un sentido que en el otro, como resultado de la capa dipolar que aparece en el semiconductor por difusión térmica. No vamos a insistir, sin embargo, en su descripción detallada.

11.4 El klinstrón

Durante la segunda Guerra Mundial tuvo lugar un gran desarrollo de equipos que utilizaban circuitos de corriente alterna a frecuencias muy elevadas, por ejemplo, de 1.000 a 24.000 megaciclos/seg (Mc/seg). El desarrollo de generadores y detectores en este intervalo de frecuencias, correspondiente a las microondas, hizo posible el radar y ha descubierto muchos nuevos campos de investigación. En esta sección nos limitaremos a describir brevemente uno de los procedimientos más importantes de generar estas frecuencias tan elevadas, basado en el empleo de la válvula klinstrón.

Existen varias razones por las que una válvula de vacío corriente no resulta satisfactoria como oscilador o amplificador, a frecuencias superiores a unos pocos cientos de megaciclos por segundo. La mayor dificultad reside en las pequeñas pero inevitables capacidades entre los electrodos de control de la válvula. Como la impedancia que presentan estas capacidades es $1/\omega C$, cuando la frecuencia se hace demasiado alta la capacidad actúa como un cortocircuito para las señales aplicadas. Otra dificultad aparece cuando el tiempo de tránsito de los electrones en la válvula, para ir desde el cátodo a la placa, se hace comparable al periodo de la señal de alta frecuencia. En estas condiciones la variación rápida de la densidad de electrones en el haz induce corrientes de alta frecuencia en la rejilla que impiden un control efectivo de la corriente. Esta dificultad limita el empleo de las válvulas ordinarias a frecuencias inferiores a unos 100 Mc/seg. Para evitar estas dificultades se emplean actualmente dispositivos en los que de hecho se aprovecha la existencia del tiempo de tránsito. Como ejemplo discutiremos el *klinstrón reflex*, que se indica esquemáticamente en la Fig. 11.14. Unida a un par de rejillas, que son atravesadas por un haz de electrones procedentes del cátodo, se dispone una cavidad metálica en forma de toroide, que a estas

frecuencias tan altas actúa como un circuito resonante *RLC*. Un electrodo auxiliar cargado negativamente repele a los electrones y les obliga a volver a atravesar el sistema de rejillas en sentido opuesto. Vamos a analizar primero cómo funcionan la cavidad y las rejillas. Si consideramos que son equivalentes a un circuito resonante *RLC*, las dos rejillas paralelas constituyen la capacidad principal del sistema y las paredes toroidales de la cavidad actúan como la autoinducción. A estas frecuencias tan elevadas, no tiene significado el hablar de elementos de circuito, y en la práctica es preferible describir la onda electromagnética oscilante que existe en el interior de la cavidad metálica. (Las ondas electromagnéticas se estudiarán en el Cap. 12.) Por tanto, el potencial relativo entre las dos rejillas paralelas oscila como resultado de las corrientes que pasan alrededor de la cavidad desde una rejilla a la otra, que a su vez son causadas por el campo electromagnético oscilante. El problema consiste en devolver a este campo oscilante la energía suficiente para compensar las pérdidas y la energía extraída en la salida. Esto es lo que se consigue mediante el haz de electrones, que toma su energía de la tensión continua existente entre el cátodo y la rejilla. Imaginemos que la cavidad está oscilando cuando el haz electrónico pasa a través del par de rejillas. Según la fase de oscilación de la tensión de la rejilla, unos electrones son acelerados mientras pasan en tanto que otros son retardados. Esto introduce diferencias de velocidad en el haz electrónico, que a su vez dan lugar a concentraciones de los electrones en ciertas regiones del haz. Ajustando de forma adecuada la tensión del repulsor, puede conseguirse que este efecto tenga lugar cuando el haz vuelve a pasar entre las rejillas, dando lugar a una serie de grupos de electrones separados por un intervalo de tiempo igual al periodo de la oscilación de la tensión de rejilla que originó esta distribución de los electrones. Si, además, ocurre que el grupo de electrones pasa entre las rejillas con una fase tal que resultan retardados por el campo, la pérdida de energía que sufren

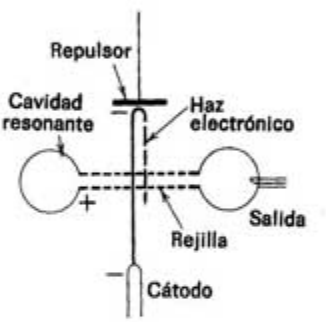


Fig. 11.14 Esquema de un klinstrom reflex.

va a parar al campo electromagnético. Por medio de este mecanismo la energía de corriente continua se convierte en oscilaciones de microondas. No discutiremos aquí otros osciladores para microondas como son el magnetrón y los tubos de onda progresiva.

PROBLEMAS

11.1 En la Fig. P 11.1 se da el esquema en el que una válvula, cuyas características son las dadas en la Fig. 11.5, está conectada a una fuente de tensión de 240 volts mediante una resistencia de placa $R_p = 30.000$ ohms. Se desea investigar el efecto de un cambio de la tensión de rejilla V_g sobre la tensión de placa V_p.

a) Dibujar sobre la Fig. 11.5 la *línea de carga*, para los valores de R_p y de la tensión aplicada dados, de este triodo. Para ello, se dibujarán en la Fig. 11.5 dos o más puntos que representen la tensión V_p en la válvula para distintas intensidades de la corriente de placa. Por ejemplo, si no hay corriente tampoco habrá caída de tensión en la resistencia de placa, así que $V_p = 240$ volts. Análogamente, si $i_p = 8$ ma, la tensión en la válvula será $V_p = 240 - i_p R_p = 240 - (8 \times 10^{-3} \times 30.000) = 0$. La recta que une estos puntos se llama línea de carga y para el circuito indicado, la válvula opera en un punto de esta línea.

b) Empleando la línea de carga, determinar gráficamente la variación de la tensión de placa cuando la tensión de rejilla se hace variar de -6 a -4 volts.

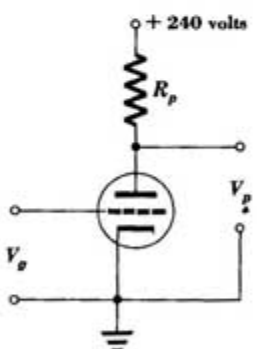


Fig. P 11.1

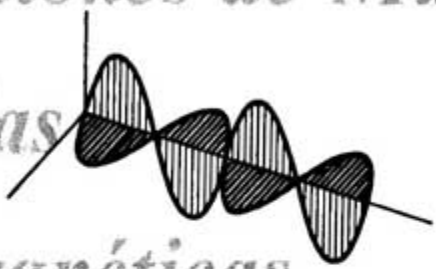
11.2 Explíquese cualitativamente por qué en un circuito amplificador como el de la Fig. 11.6 existe una diferencia de fase de 180° entre las señales de entrada y salida.

11.3 Analícese brevemente el contraste que existe entre la variación con la temperatura de la resistividad de un metal y la de un semiconductor.

11.4 Explíquese por qué, al poner en contacto un semiconductor tipo *n* y uno tipo *p*, hay un cambio del potencial electrostático. ¿Cuál se hace más positivo y por qué?

DOCE

Las Ecuaciones de Maxwell y las Ondas Electromagnéticas



12.1 Introducción

Los hechos experimentales que fundamentan la electricidad y el magnetismo hasta aquí estudiados, no incluyen una de las ideas básicas de la teoría. En este capítulo vamos a describir la obra revolucionaria de Maxwell—publicada en 1865—, que agrupó, en una teoría unificada y coherente, los fenómenos de electricidad y magnetismo aparentemente desconectados entre sí. La obra teórica de Maxwell puso de relieve el principio omitido y condujo a su postulado de la transmisión de energía por medio de *ondas electromagnéticas*. El descubrimiento de Maxwell de que las ondas electromagnéticas deberían propagarse con una velocidad muy próxima a la determinada experimentalmente para la luz, le llevó a la conclusión de que la luz misma es una onda electromagnética, como había sido sugerido anteriormente por Faraday.

12.2 La teoría general del electromagnetismo

Vamos a empezar por volver a escribir las ecuaciones, anteriormente establecidas sobre una base experimental, en una forma más general equivalente a la propuesta por Maxwell. Para simpli-

ficar consideraremos el caso del vacío, aunque resulta bastante sencillo modificarlas para tener en cuenta la presencia de los medios dieléctricos y magnéticos.

De la ley de inducción de Faraday se deduce directamente la ecuación

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 \int \frac{d\mathbf{H}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \tag{12.1}$$

El primer miembro es la integral curvilínea del campo eléctrico a lo largo de una trayectoria cerrada cualquiera en el espacio. Es equivalente al trabajo por unidad de carga necesario para mover una carga a lo largo de toda la trayectoria y representa, por tanto, la fem inducida $\mathcal{E}$. De acuerdo con la ley de Faraday, ésta es igual y de signo opuesto a la derivada del flujo magnético, que atraviesa el área limitada por la trayectoria, con respecto al tiempo. Pero éste es precisamente el significado del segundo miembro, puesto que $\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int \mu_0 \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \Phi$, y, por tanto, si $\mathbf{H}$ es variable con el tiempo, podemos escribir $d\Phi/dt = -\mu_0 \int d\mathbf{H}/dt \cdot d\mathbf{S}$. La integral ha de extenderse a un área limitada por la trayectoria elegida. Cualitativamente nos dice que en una región del espacio en la que está variando con el tiempo el flujo magnético aparece un campo eléctrico. La ley de Faraday da una relación entre un campo $\mathbf{H}$ variable y el campo $\mathbf{E}$ que resulta. Nada nuevo se ha añadido al anterior enunciado de la ley de Faraday, pero en la presente forma se destaca el hecho de que se trata de una propiedad del espacio y no depende de la presencia de una espira conductora en la trayectoria.

Las ecuaciones siguientes:

$$\int_{sc} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{12.2}$$

y

$$\int_{sc} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{12.3}$$

establecen que las líneas de $\mathbf{D}$ y $\mathbf{B}$ son continuas. En efecto, nos dicen que el flujo neto de líneas de $\mathbf{D}$ o $\mathbf{B}$ es cero para cualquier volumen arbitrario. El flujo neto de $\mathbf{D}$ es cero porque hemos supuesto que nos hallamos en el vacío. Como vimos anteriormente, estas ecuaciones implican la validez de la ley de proporcionalidad inversa con el cuadrado de la distancia para las fuerzas, ya que solo en este caso los campos conducen a líneas de fuerza continuas.

Hemos escrito tres de las cuatro relaciones fundamentales de Maxwell. En la sección siguiente vamos a ver cómo Maxwell llegó a su cuarta relación, en la que interviene el concepto nuevo de *corriente de desplazamiento*.

12.3 La corriente de desplazamiento

En su proceso de unificar la teoría electromagnética, Maxwell descubrió la relación que conduce a la posibilidad de que existan las ondas electromagnéticas. Esta relación es la inversa de la ley de Faraday, en la forma indicada en la Ec. (12.1). Maxwell demostró que al igual que un campo magnético variable da lugar a un campo eléctrico, un campo eléctrico variable da lugar a un campo magnético. El razonamiento que damos aquí es semejante al de Maxwell.

Empecemos por examinar la forma generalizada de la ley de Ampere que da la producción de un campo magnético por una corriente:

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i \qquad \text{o} \qquad \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = i \tag{6.14}$$

Resulta equivalente la forma

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} \tag{12.4}$$

en la que la integral curvilínea se extiende a una trayectoria cerrada, y la integral de superficie se extiende a *cualquier* superficie cuyo borde sea precisamente la trayectoria de la integral curvilínea. Evidentemente, la integral de la densidad de corriente $\mathbf{j}$ es la corriente total abarcada por la trayectoria. Si escogemos ésta de modo que $\mathbf{H}$ resulte tangencial y siempre del mismo valor podemos calcular $\mathbf{H}$, como vimos anteriormente. En la Fig. 12.1 se ilustra la idea de que *cualquier* superficie cuyo contorno sea la trayectoria cerrada de la integral curvilínea da el mismo resultado. En el caso de un hilo por el que pasa corriente, vemos que esto es cierto, puesto que

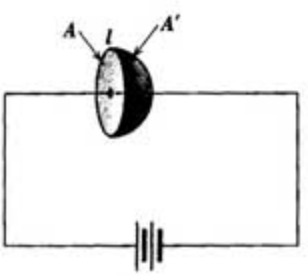


Fig. 12.1 Dos de las superficies cuyo contorno es la línea cerrada l.

la integral de superficie es siempre igual a i, en tanto que la trayectoria rodee al conductor. En la figura se indican como ejemplo una superficie plana A, y otra hemiesférica A', con el mismo contorno l.

Vamos a examinar la situación cuando la batería se remplaza por un generador de alterna y se incluye un condensador en el circuito, tal como se indica en la Fig. 12.2. Como ya hemos visto antes,

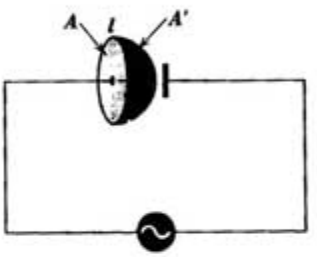


Fig. 12.2 La integral de $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ *calculada mediante la superficie A vale i; y mediante la superficie A' resulta cero a menos que se tome en consideración la corriente de desplazamiento.*

el condensador es atravesado por una corriente alterna, aunque no haya realmente transferencia de cargas entre sus placas. El razonamiento seguido por Maxwell hacía uso de dos áreas A y A', cuyo contorno común es la trayectoria l. Observemos que cuando la integración se extiende a la superficie A, la integral $\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ es igual i, pero si se extiende a la superficie A', la integral vale 0. Esta situación contradictoria solo puede solucionarse si postulamos con Maxwell un término adicional en la Ec. (12.4) en el cual el campo eléctrico variable existente en el condensador, asuma el lugar de la corriente eléctrica como productor de campos magnéticos. Este es el concepto de corriente de desplazamiento de Maxwell y de este modo desaparece la ambigüedad matemática que la Ec. (12.4) presenta en el caso de corriente alterna.

Para un condensador plano es sencillo obtener la relación deseada. Como la corriente es la velocidad con que la carga se acumula en las placas del condensador (la carga se conserva), podemos escribir

$$i = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} \tag{12.5}$$

Pero $i = dq/dt = A\, d\sigma/dt$, o bien, $j = d\sigma/dt$. Ya hemos visto que entre las placas de un condensador plano, $D = \sigma$, de modo que $d\sigma/dt$ puede remplazarse por dD/dt. La Ec. (12.4) se convierte en

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \tag{12.6}$$

para la región entre las placas del condensador. Esto es, la corriente de desplazamiento dD/dt actúa como una densidad de corriente j en que da lugar a un campo magnético. Por tanto, la expresión completa con los dos términos, el efecto magnético de la corriente real en el hilo y el efecto magnético de la variación de D, podrá escribirse

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int \mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} + \int \frac{d\mathbf{D}}{dt}\cdot d\mathbf{S} \tag{12.7}$$

En la mayor parte de los casos en que intervienen cuerpos conductores, este nuevo término es despreciable a bajas frecuencias comparado con el término de corriente de conducción. Por el contrario, en el vacío es el único término existente.

Como veremos más adelante, para explicar las ondas electromagnéticas es necesario este nuevo concepto de generación de un campo magnético por una corriente de desplazamiento, esto nos permite considerar la existencia de estas ondas como la prueba definitiva de la validez del razonamiento seguido por Maxwell.

El desarrollo de la idea de que la luz es una radiación electromagnética es uno de los más interesantes de la historia de la física. Vamos a citar brevemente parte de la introducción del trabajo[1] en el que Maxwell dio a conocer la teoría electromagnética de la luz. En ella, Maxwell resume los resultados de sus investigaciones matemáticas, describiendo ocho relaciones a las que denomina ecuaciones generales del campo electromagnético. Son esencialmente equivalentes a las cuatro llamadas hoy ecuaciones de Maxwell. Después, Maxwell se dedica a discutir algunas de las consecuencias de sus resultados en los párrafos siguientes:

> A continuación se aplican las ecuaciones generales al caso de una perturbación magnética propagada a través de un medio no-conductor, y se demuestra que las únicas perturbaciones que pueden propagarse son aquellas que son transversales a la dirección de propagación, y que la velocidad de propagación es la velocidad v, hallada en experimentos como los de Weber, que expresa el número de unidades electrostáticas de electricidad que están contenidas en una unidad electromagnética.
>
> Esta velocidad es tan próxima a la de la luz, que parece que tenemos razones muy fuertes para llegar a la conclusión de que la luz misma (incluyendo el calor radiante, y otras radiaciones si las hay) es una perturbación electromagnética en forma de ondas electromagnéticas que se propagan en el campo electromagnético de acuerdo con las leyes electromagnéticas. Si esto es así, el acuerdo entre la elasticidad del medio, calculada a partir de las va-

[1] James Clerk Maxwell, A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **155**:459 (1865).

riaciones rápidas de las vibraciones luminosas, y calculada por los procesos lentos de los experimentos eléctricos, demuestra cuán perfectas y regulares deben ser las propiedades elásticas del medio cuando no está perturbado por ninguna sustancia más densa que el aire. Si este mismo carácter de la elasticidad se mantiene en los cuerpos transparentes más densos, resulta que el cuadrado del índice de refracción es igual al producto de la capacidad dieléctrica específica y la capacidad magnética específica. Se demuestra que los medios conductores absorben estas radiaciones rápidamente y de ello que sean generalmente opacos.

El concepto de la propagación de perturbaciones magnéticas transversales excluyendo las normales aparece claramente expresado por el Profesor Faraday en sus «Reflexiones sobre las vibraciones de rayos». La teoría electromagnética de la luz, tal como él la propuso, es la misma sustancialmente que la que yo he empezado a desarrollar en este trabajo, excepto en que en 1846 no había ningún dato para calcular la velocidad de propagación.

12.4 La física y matemáticas de las ondas

Nuestra tarea inmediata es el ver cómo la formulación general del electromagnetismo de Maxwell conduce a ondas que se propagan. Sin embargo, antes de hacerlo resulta útil revisar la teoría de propagación de una onda. Vamos a considerar el caso sencillo de propagación de una onda en una cuerda tensa.

En la Fig. 12.3 se indica una sección de una cuerda muy larga sujeta en sus extremos bajo una tensión T. Un punto de la cuerda

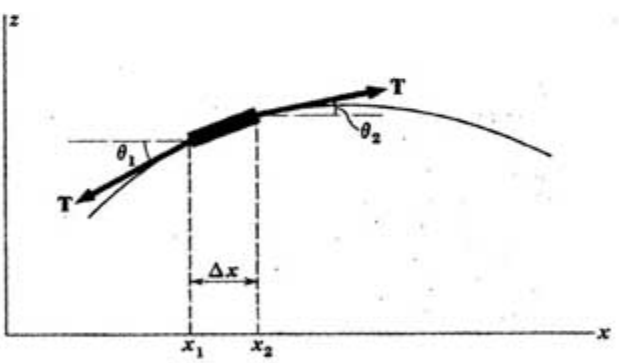


Fig. 12.3 Elemento de longitud sobre una cuerda tensa, para deducir la ecuación de ondas.

ha sido desplazado transversalmente en la dirección z y después abandonado. Como resultado, se propaga por la cuerda en la dirección x una onda de desplazamiento. Vamos a concentrar nuestra atención en un pequeño segmento Δx de la cuerda, con el fin de determinar la forma en que la onda se mueve a lo largo de ella. El movimiento de este segmento se obtiene aplicando la segunda ley de Newton, así que vamos a analizar en primer lugar las fuerzas

exteriores que actúan sobre él como consecuencia de la tensión de la cuerda.

En la figura se observa que para desplazamientos pequeños las componentes de la fuerza según el eje x se anulan. En efecto, sea ΔF_x la fuerza neta en la dirección x, en el diagrama encontramos

$$\Delta F_x = T \cos \theta_2 - T \cos \theta_1 \sim 0$$

puesto que para desplazamientos pequeños $\cos \theta_2 \sim \cos \theta_1$. Como resultado de esto, el movimiento del segmento considerado tiene lugar en la dirección z. La fuerza neta según esta dirección vale

$$\Delta F_z = T \operatorname{sen} \theta_2 - T \operatorname{sen} \theta_1 \tag{12.8}$$

y para desplazamientos pequeños

$$\operatorname{sen} \theta_1 \sim \operatorname{tg} \theta_1 = s_1$$

$$\operatorname{sen} \theta_2 \sim \operatorname{tg} \theta_2 = s_2$$

siendo s_1 y s_2 las pendientes de la línea que adopta la cuerda en x_1 y x_2. Esto es,

$$s = \frac{dz}{dx} \tag{12.9}$$

Para Δx pequeños, podemos escribir

$$s_2 = s_1 + \frac{ds}{dx} \Delta x \qquad \text{o} \qquad s_2 - s_1 = \frac{ds}{dx} \Delta x \tag{12.10}$$

en las que se ha supuesto que el cambio de pendiente varía linealmente con x a lo largo de la pequeña distancia Δx. Con esta aproximación, podemos volver a escribir la Ec. (12.8) en la forma

$$\Delta F_z = T \frac{ds}{dx} \Delta x \tag{12.11}$$

Vamos ahora a aplicar al segmento la ley de Newton, notando que su masa puede escribirse en la forma $\Delta m = \rho(x_2 - x_1) = \rho \, \Delta x$, siendo ρ la densidad másica de la cuerda:

$$\Delta F_z = \Delta m \frac{dv_z}{dt} \qquad \text{o} \qquad T \frac{ds}{dx} \Delta x = \rho \, \Delta x \frac{dv_z}{dt}$$

Cuando se divide por Δx esta última ecuación, resulta

$$\rho \frac{dv_z}{dt} = T \frac{ds}{dx} \tag{12.12}$$

ecuación que relaciona la aceleración con el cambio de pendiente a lo largo de x. Tomemos la derivada de la Ec. (12.12) con respecto al tiempo

$$\rho \frac{d^2 v_z}{dt^2} = T \frac{d^2 s}{dx\, dt} \tag{12.13}$$

y finalmente simplifiquémosla mediante el empleo de las relaciones siguientes:

$$v_z = \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{dv_z}{dx} = \frac{d^2 z}{dx\, dt}$$

$$s = \frac{dz}{dx} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{d^2 z}{dx\, dt}$$

Resulta

$$\therefore \frac{ds}{dt} = \frac{dv_z}{dx} \tag{12.14}$$

Si derivamos esta Ec. (12.14) con respecto a x, tenemos

$$\frac{d^2 s}{dt\, dx} = \frac{d^2 v_z}{dx^2} \tag{12.15}$$

Y sustituyendo en la Ec. (12.13) nos da

$$\rho \frac{d^2 v_z}{dt^2} = T \frac{d^2 v_z}{dx^2} \tag{12.16}$$

Esta ecuación final es la ecuación diferencial de una onda transversal que viaja por la cuerda. Es esencialmente equivalente a $F = ma$, pues da la aceleración transversal en función de la fuerza efectiva. $T\, d^2 v_z/dx^2$.

Es inmediato asegurarnos de que se trata de un movimiento ondulatorio a lo largo de la cuerda, comprobando que la ecuación diferencial resulta satisfecha por la ecuación de una onda transversal. Hagamos.

$$v_z = v_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - ut) \tag{12.17}$$

que representa una onda transversal de velocidad sinusoidal, de longitud de onda λ, y que se mueve con velocidad u en la dirección positiva de las x. Sustituyendo las derivadas apropiadas de esta ecuación en la (12.16) se demuestra que la velocidad con que viaja es

$$u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Vamos a demostrar ahora explícitamente que la Ec. (12.17) representa una onda que viaja en la dirección x, en este caso en el sentido positivo, con una velocidad u, y que tiene una longitud de onda λ. La longitud de onda se determina haciendo t constante y considerando que si nos movemos de una posición x_0 a otra $x_0 + \lambda$, el argumento de la función coseno varía de $2\pi(x_0 - ut)/\lambda$ a $2\pi(x_0 + \lambda - ut)/\lambda = 2\pi(x_0 - ut)/\lambda + 2\pi$. Como el coseno es una función periódica de periodo 2π, tiene el mismo valor en estas dos posiciones, con lo que V_z tiene el mismo valor. Este resultado se cumple para todos los puntos $x_0 + n\lambda$, siendo n un entero, de modo que λ es la longitud de onda de la perturbación. Si el tiempo se aumenta en dt, la posición x debe aumentar en dx de modo que

$$x + dx - u(t + dt) = (x - ut)$$

Esto exige que $dx - u\,dt = 0$, o sea, $u = dx/dt$. Por tanto, queda demostrado que u es la velocidad de la onda. Para una onda que viaje en el sentido negativo del eje x, la Ec. (12.17) se escribe en la forma

$$v_z = v_0 \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x + vt)$$

También podemos emplear la Ec. (12.17) para deducir las relaciones entre frecuencia f, longitud de onda λ, y velocidad de propagación u. Para ello, permanezcamos en una posición fija del eje x ($x = 0$ por conveniencia). El argumento del coseno resulta entonces $2\pi ut/\lambda$. La perturbación que se propaga a lo largo de x se traduce en variaciones periódicas de v_z en el punto $x = 0$ que hemos escogido. Si ahora suponemos que transcurre un intervalo de tiempo desde t a $t + \lambda/u$, el argumento del coseno se convierte en $2\pi ut/\lambda + 2\pi$, que conduce al mismo valor de v_z que para t. Por tanto, λ/u es el *periodo*, o u/λ la *frecuencia*, de la perturbación, y tenemos

$$\lambda f = u \tag{12.18}$$

Podíamos haber seguido estos razonamientos igualmente válidos en términos de un *desplazamiento*, z, de la cuerda de su posición de equilibrio,

$$z = z_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - ut)$$

El empleo del seno o del coseno es naturalmente arbitrario y depende únicamente de la elección de las condiciones iniciales. Con muy poco trabajo adicional es posible demostrar que *cualquier* función de $(x \pm ut)$ es solución de la ecuación diferencial de la onda, de modo que en modo alguno estamos limitados a ondas sinusoidales. Con estos resultados para un sistema mecánico sencillo vamos a considerar el problema de las ondas electromagnéticas.

12.5 Ondas electromagnéticas

Vamos a escribir de nuevo, por conveniencia, las ecuaciones de Maxwell para el caso del vacío antes de demostrar cómo conducen a propagación de ondas.

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 \int \frac{d\mathbf{H}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \tag{12.1}$$

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = \int \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot d\mathbf{S} \tag{12.6}$$

$$\int_{SC} \mathbf{D}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{12.2}$$

$$\int_{SC} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \tag{12.3}$$

Para simplificar los razonamientos, consideraremos solo el caso de ondas planas, con dirección de propagación según el eje x. En la Sec. 12.6 demostraremos que para una onda plana los campos eléctrico y magnético asociados a la onda están dirigidos transversalmente a la dirección de propagación (es decir, en el plano yz). Entretanto supondremos que se cumple esto, y, además, que se trata del caso especial de una onda *polarizada*, en la que el campo eléctrico está dirigido según la dirección del eje y. Este campo E_y depende solo de x y t. Demostraremos más adelante que **H** está análogamente limitado a una sola dirección, la del eje z, perpendicular a **E**. En la

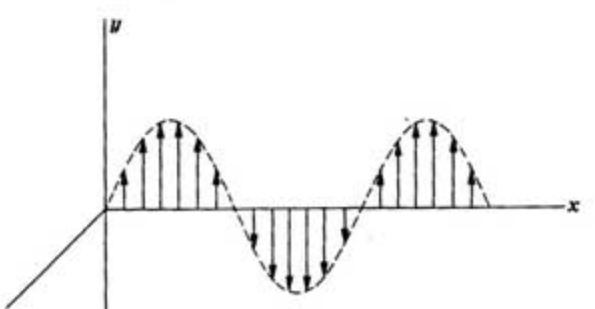


Fig. 12.4 Vectores **E** *en el plano xy indicando la variación de* **E** *a lo largo del eje x.*

Fig. 12.4 se da el esquema de los vectores **E** (no sus líneas de fuerza) tal como podrían presentarse. Solo se ha representado la variación con x. La variación con t podría haberse indicado dibujando varias figuras en las que la posición de la sinusoide a lo largo del eje x fuera diferente para cada uno de los instantes escogidos. Aunque se ha supuesto una variación sinusoidal, como dijimos, no es necesario que así ocurra. Los vectores solo se han dibujado a lo largo del eje x del sistema de coordenadas. En una onda plana, sin embargo, existe el mismo campo **E** en todos los puntos del plano paralelo al yz que corresponde a un valor dado de x. Mediante el empleo de las dos primeras ecuaciones de Maxwell, vamos a demostrar que estas variaciones espacial y temporal de **E**, que hemos postulado, conducen a variaciones semejantes de **H** (pero en dirección perpendicular a **E**) y que esta variación de **H** actúa a su vez de modo que causa la variación supuesta para **E**. Esto es, una vez que se ha iniciado una onda de este tipo, se propaga espontáneamente.

En la Fig. 12.5 se indica cómo se aplica la Ec. (12.1) a la onda plana **E**, que suponemos se está moviendo según la dirección x. En el plano xy se ha dibujado una trayectoria cerrada apropiada, a lo

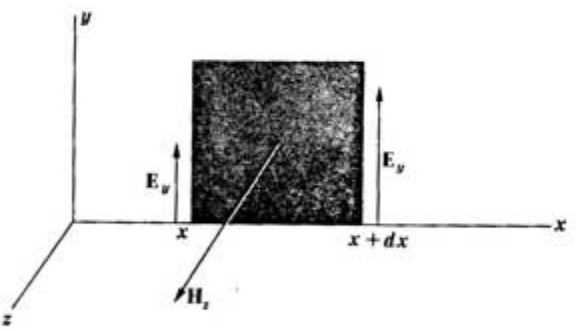


Fig. 12.5 Relación entre H_z y la variación de E_y a lo largo del eje x.

largo de la cual realizaremos la integración de **E**. Según la Ec. (12.1) esto debe ser igual a la variación en el flujo de **H** que atraviesa el rectángulo cuyo contorno es la trayectoria tomada para la integral curvilínea. Solo los lados verticales contribuyen a la integral de línea puesto que **E** tiene precisamente la dirección y, de modo que $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x} = 0$ (en los horizontales). Si recorremos la trayectoria en el sentido contrario al de las agujas del reloj, la integral resultará

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (E_y)_{x+dx}\, dy - (E_y)_x\, dy = [(E_y)_{x+dx} - (E_y)_x]\, dy$$

en la que han de tomarse los valores de E_y en x y en $x + dx$, respectivamente. La diferencia entre los valores de E_y en estas dos posiciones es $(\partial E_y/\partial x)\, dx$, de modo que podemos escribir la Ec. (12.1) en la forma

$$\frac{\partial E_y}{\partial x}\,dx\,dy = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}\,dx\,dy$$

Y como esta relación es cierta para cualquier área $dx\,dy$, nos quedará

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \tag{12.19}$$

La etapa siguiente es determinar el campo **E** que resulta de la

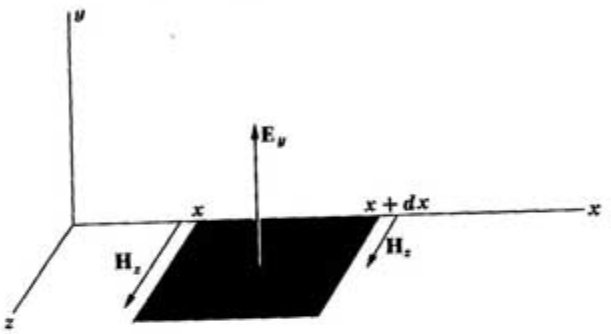


Fig. 12.6 Relación entre E_y y la variación de H_z a lo largo del eje x.

variación de **H** a lo largo del eje, mediante la Ec. (12.6). Empleando la Fig. 12.6, podemos seguir un camino análogo

$$\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = [(H_z)_x - (H_z)_{x+dx}]\,dz$$

$$= -\frac{\partial H_z}{\partial x}\,dx\,dz = +\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}\,dx\,dz$$

o sea

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{12.20}$$

Las Ecs. (12.19) y (12.20) relacionan la variación espacial de uno de los campos a la variación temporal del otro, y viceversa. Si derivamos la primera respecto a x y la segunda respecto a t, resulta que podemos combinarlas en una sola ecuación del modo siguiente:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial x\,\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x\,\partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \tag{12.21}$$

Si hacemos las derivadas permutando las ecuaciones, resulta que para H_z es válida una ecuación idéntica

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} \tag{12.22}$$

Estas ecuaciones constituyen el resultado que buscábamos. Comparando con la Ec. (12.16) que corresponde a la propagación de una onda transversal por una cuerda, observamos inmediatamente que hemos llegado a unas ecuaciones diferenciales cuya solución es una onda que se propaga según el eje x. La velocidad de propagación viene dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \tag{12.23}$$

Los dos campos son mutuamente perpendiculares y se propagan juntos en la dirección x. El acuerdo entre la velocidad de la luz determinada experimentalmente ($\sim 3 \times 10^8$ m/seg) y el valor calculado a partir de los valores de ϵ_0 y μ_0 es el que sugirió a Maxwell la hipótesis de la naturaleza electromagnética de la luz.

Utilizando los resultados obtenidos en la Sec. 12.4, podemos escribir para el campo eléctrico que forma parte de la onda electromagnética,

$$E_y = E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct) \tag{12.24}$$

siendo c la velocidad de propagación y λ la longitud de onda. Esta

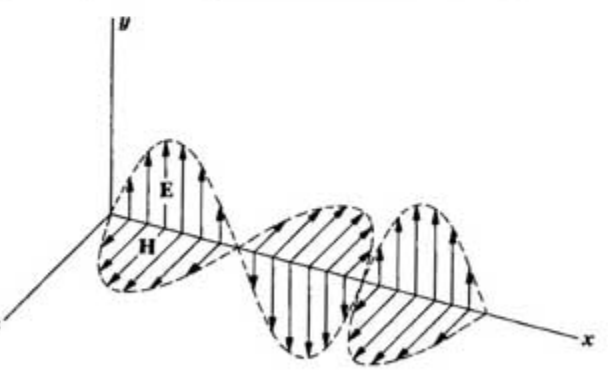


Fig. 12.7 Representación esquemática de una onda electromagnética plana.

es una solución de la Ec. (12.21). La componente magnética, solución de la Ec. (12.22), valdrá análogamente

$$H_z = H_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct)$$

Con esto hemos completado nuestro propósito de demostrar cómo las ecuaciones de Maxwell conducen a las ondas electromagnéticas. En la Fig. 12.7 se ha representado esquemáticamente una onda plana. Queda aún otra etapa de interés que es determinar la relación que existe entre los valores de los vectores eléctrico y magnético en la onda. Vamos a derivar la Ec. (12.24) de una onda sinusoidal con respecto al tiempo, lo que nos da

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -E_0 \frac{2\pi}{\lambda} c \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$$

Y sustituyendo en la Ec. (12.20), resulta

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon_0 E_0 \frac{2\pi c}{\lambda} \cos \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$$

que puede integrarse con respecto a x. Así se obtiene

$$H_z = c\epsilon_0 E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct) = \left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E_0 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)$$

en la que hemos sustituido el valor de c dado por la Ec. (12.23). Como se ha dibujado en la Fig. 12.7, esta ecuación nos dice que E_y y H_z están en fase, y que

$$\sqrt{\mu_0} H_z = \sqrt{\epsilon_0} E_y \tag{12.25}$$

Si en lugar del vacío existe un medio material estas ecuaciones deben ser modificadas empleando ϵ y μ en vez de ϵ_0 y μ_0.

Las ondas planas no-polarizadas están constituidas por la superposición de una serie de ondas planas polarizadas en las que las direcciones de **E** y **H** están distribuidas al azar en el plano yz. Los vectores **E** y **H** en cada una de estas ondas planas componentes son mutuamente perpendiculares.

12.6 Naturaleza transversal de las ondas planas

Vamos a demostrar ahora, que para una onda plana que se propaga, por ejemplo, en la dirección x, los vectores **D** o **E**, y **B** o **H** deben estar dirigidos transversalmente (en el plano yz). Para ello, consideremos un cubo elemental de dimensiones dx, dy y dz, tal como se indica en la Fig. 12.8. En un instante dado, apliquemos la Ec. (12.2) a la superficie de este cubo, lo que nos asegura que el flujo de **D** a través de las caras del cubo es cero. Como se trata de una onda plana, **D** no varía con y o con z, por lo que el flujo neto a través de las caras $dx\,dy$ y $dx\,dz$ es cero. Llegamos, pues, a la conclusión de que el flujo neto a través de las caras $dy\,dz$ debe ser también cero,

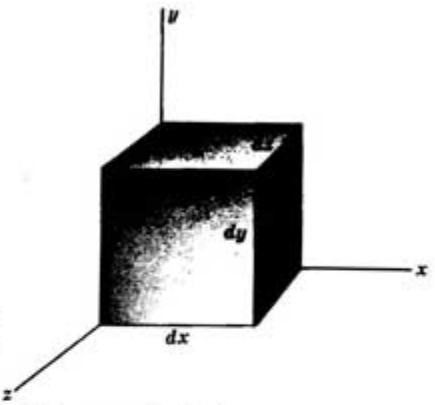


Fig. 12.8 Cubo elemental para demostrar que **D** *y* **B** *son transversales en una onda plana.*

puesto que el flujo total lo es. Ahora bien, el flujo a través de la cara de la izquierda es $-D_x dy\, dz$ (el signo negativo procede de que la normal exterior de esta cara es en dirección negativa). El flujo a través de la cara de la derecha es $D_x dy\, dz$. Se llega, pues, a la conclusión de que D_x debe tener el mismo valor en ambas caras en cualquier instante, y, por tanto, no puede variar a lo largo de x. En una onda solo pueden figurar campos variables en el espacio, por lo que la onda no puede tener componente alguna de los campos en la dirección de propagación. Cualquier D_x que pueda existir no tiene ninguna relación con la onda. Una demostración semejante referente a B_x se obtiene aplicando la Ec. (12.3). Hemos demostrado, pues, que tanto **D** como **B** (o **E** y **H**) están situados sobre el plano yz, y, por tanto, son transversales a la dirección de propagación.

12.7 Propagación de la energía. El vector de Poynting

La propagación de campos eléctricos y magnéticos en el espacio lleva consigo una transmisión de energía, puesto que los campos llevan asociada una energía almacenada. En esta sección vamos a definir y calcular el vector propagación de energía **S**, denominado *vector de Poynting*. Representa la velocidad de flujo de la energía a través de la unidad de área situada perpendicularmente a la dirección de propagación. En óptica se suele denominar *flujo luminoso*. Puede comprenderse su significado considerando un cierto volumen limitado por una superficie cerrada y expresando cómo cambia la energía existente en dicho volumen. Sea U la energía electromagnética en el interior de este volumen; la variación con el tiempo de esta energía es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\int_{SC} \mathbf{S}\cdot d\mathbf{A} \tag{12.26}$$

Así, pues, la derivada temporal de la energía en el volumen dado es la integral de superficie de **S** extendida a la superficie que lo limita. En esta ecuación hemos sustituido el símbolo usual del elemento de área, $d\mathbf{S}$, por $d\mathbf{A}$ para evitar confusiones con el vector de Poynting **S**. El signo negativo sirve para tener en cuenta que cuando está entrando energía en el volumen considerado la integral del segundo miembro de la ecuación es negativa.

Vamos ahora a calcular **S** para una onda electromagnética. Para ello consideremos un volumen $dx\,dy\,dz$ (Fig. 12.9) que es atravesado por una onda plana que se propaga en la dirección x. Vamos a expresar la energía contenida en este volumen en función de **E** y **H** y después relacionar su variación con el flujo de **S** a través de la superficie que limita este volumen. Según resultados anteriores la energía existente en el volumen considerado es

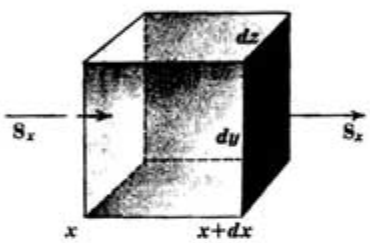


Fig. 12.9 Flujo de energía debido a una onda plana que atraviesa un cubo elemental.

$$U = \left(\frac{\epsilon_0 E_y^{\,2}}{2} + \frac{\mu_0 H_z^{\,2}}{2}\right) dx\,dy\,dz \tag{12.27}$$

y derivando respecto al tiempo obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \left(\epsilon_0 E_y \frac{\partial E_y}{\partial t} + \mu_0 H_z \frac{\partial H_z}{\partial t}\right) dx\,dy\,dz$$

Hemos elegido como antes una onda plana con **E** y **H** en las direcciones y y z, respectivamente. Vamos a sustituir ahora las derivadas de E_y y H_z por sus variaciones espaciales empleando las Ecs. (12.19) y (12.20); así obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\left(E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} + H_z \frac{\partial E_y}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}(E_y H_z)\,dx\,dy\,dz \tag{12.28}$$

A continuación vamos a poner $\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ en la misma forma que la Ec. (12.28) de modo que pueda calcularse **S** en función de E_y y H_z. Para una onda plana que se propague en la dirección x, la energía solo puede transmitirse en esa misma dirección (puesto que E_y y H_z solo dependen de x y t), por lo que el flujo de energía tendrá lugar exclusivamente a través de las caras $dy\,dz$, y **S** habrá de tener la dirección del eje x. Por tanto,

$$\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = (S_x dy\,dz)_{x+dx} - (S_x dy\,dz)_x$$
$$= [(S_x)_{x+dx} - (S_x)_x] dy\,dz$$

El término entre paréntesis de caja puede escribirse en la forma $(\partial S_x/\partial x)\,dx$, con lo que la ecuación anterior se convierte en

$$\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \frac{\partial S_x}{\partial x} dx\,dy\,dz \tag{12.29}$$

Ahora, comparando las Ecs. (12.28) y (12.29) con la Ec. (12.26), encontramos

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_y H_z)\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial S_x}{\partial x} dx\,dy\,dz$$

y como la ecuación debe satisfacerse para un volumen arbitrario, debe ser

$$\frac{\partial}{\partial x}(E_y H_z) = \frac{\partial S_x}{\partial x}$$

Integrando respecto a x resulta

$$S_x = E_y H_z \tag{12.30}$$

salvo una constante que puede despreciarse.

En el caso general, **S** está dado por el producto vectorial

$$\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \qquad \text{julios/seg-m}^2 = \text{vatios/m}^2 \tag{12.31}$$

El vector de Poynting da, pues, el valor del flujo de energía. La dirección de este flujo es perpendicular al plano formado por **E** y **H**, es decir, en la dirección del producto (**E** × **H**).

En la Ec. (12.31), **E** y **H** se refieren a valores instantáneos. En el caso de campos que varíen sinusoidalmente con el tiempo, el valor medio de **S** resulta ser

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}_{ef} \times \mathbf{H}_{ef}$$

o bien, como $\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E}_0/\sqrt{2}$ y $\mathbf{H}_{ef} = \mathbf{H}_0/\sqrt{2}$, siendo $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ las amplitudes, resulta

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0)$$

En algunos casos, el cálculo de $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ para una determinada superficie puede dar lugar a resultados incorrectos. Supongamos, por ejemplo, que entre los polos de un imán permanente existe un condensador cargado, orientado de modo que $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. El vector de Poynting $\mathbf{S}$ calculado en una dirección perpendicular a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ sería finito y parecería indicar la existencia de un flujo de energía. Sin embargo, el único caso en que el vector de Poynting está asociado con una magnitud medible es aquel en el que existe un flujo neto hacia dentro o hacia fuera de un elemento de volumen. Por ejemplo, el cálculo de $\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ sobre una superficie que rodee una antena de radio que está emitiendo ondas electromagnéticas, nos da efectivamente la potencia radiada. En el caso de un condensador con carga constante situado en un campo magnético estático, la integral de superficie extendida a la superficie cerrada que limita un volumen cualquiera debe ser siempre cero, puesto que no hay radiación alguna de energía.

12.8 Ejemplo de cálculo del vector de Poynting

Como hemos indicado, el empleo del vector de Poynting es correcto siempre que exista un flujo neto de energía en un volumen determinado. Vamos a considerar un ejemplo en el que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son constantes en el tiempo. Supongamos que se aplica entre los extremos de una resistencia cilíndrica de longitud L, radio r, y valor R, una

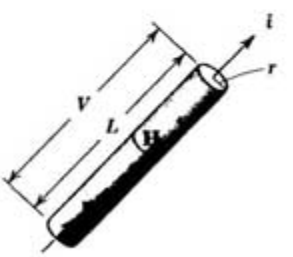


Fig. 12.10 Cálculo de la energía absorbida por una resistencia. El vector de Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, está dirigido hacia dentro en la superficie de la resistencia.

diferencia de potencial V. La potencia disipada en la resistencia es i^2R. Vamos a demostrar que

$$\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = i^2R \tag{12.32}$$

o bien, como $\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E}_0/\sqrt{2}$ y $\mathbf{H}_{ef} = \mathbf{H}_0/\sqrt{2}$, siendo $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ las amplitudes, resulta

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0)$$

En algunos casos, el cálculo de $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ para una determinada superficie puede dar lugar a resultados incorrectos. Supongamos, por ejemplo, que entre los polos de un imán permanente existe un condensador cargado, orientado de modo que $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$. El vector de Poynting $\mathbf{S}$ calculado en una dirección perpendicular a $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ sería finito y parecería indicar la existencia de un flujo de energía. Sin embargo, el único caso en que el vector de Poynting está asociado con una magnitud medible es aquel en el que existe un flujo neto hacia dentro o hacia fuera de un elemento de volumen. Por ejemplo, el cálculo de $\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$ sobre una superficie que rodee una antena de radio que está emitiendo ondas electromagnéticas, nos da efectivamente la potencia radiada. En el caso de un condensador con carga constante situado en un campo magnético estático, la integral de superficie extendida a la superficie cerrada que limita un volumen cualquiera debe ser siempre cero, puesto que no hay radiación alguna de energía.

12.8 Ejemplo de cálculo del vector de Poynting

Como hemos indicado, el empleo del vector de Poynting es correcto siempre que exista un flujo neto de energía en un volumen determinado. Vamos a considerar un ejemplo en el que $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ son constantes en el tiempo. Supongamos que se aplica entre los extremos de una resistencia cilíndrica de longitud L, radio r, y valor R, una diferencia de potencial V. La potencia disipada en la resistencia es i^2R. Vamos a demostrar que

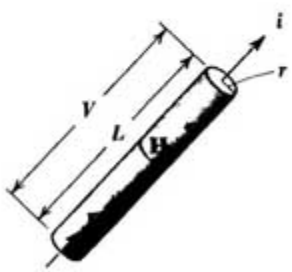


Fig. 12.10 Cálculo de la energía absorbida por una resistencia. El vector de Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, está dirigido hacia dentro en la superficie de la resistencia.

$$\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = i^2R \tag{12.32}$$

esto es, que el flujo de energía a través de la superficie de la resistencia, tal como queda determinado por la integral del vector de Poynting, representa precisamente la velocidad con que la energía eléctrica se convierte en calor dentro de la resistencia misma.

El cálculo exige determinar los valores de **E** y **H** en la superficie del elemento. **E** está dirigido a lo largo de la superficie lateral y su valor es $\frac{V}{L} = \frac{iR}{L}$. Las líneas de **H** forman círculos alrededor de la resistencia, y según la ley de Ampere en la superficie tendrá el valor $H = i/2\pi r$. Tomando $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ encontramos que **S** está dirigido hacia dentro de la resistencia en toda la superficie lateral (y que es paralelo a la superficie de las bases). Por tanto, la integral de **S** extendida a toda la superficie de la resistencia nos da

$$\int_{SC} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} = \int EH \, dA = \frac{iR}{L} \frac{i}{2\pi r} 2\pi r L = i^2 R$$

Como **S** es paralela a las bases, la integral en ellas es cero. Resulta, pues, demostrada la Ec. (12.32).

12.9 Generación de ondas electromagnéticas

De las consideraciones de la sección anterior se desprende que el requisito para generar ondas electromagnéticas es conseguir simultáneamente campos **E** y **H** oscilantes orientados de modo que conduzcan a un valor finito de $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. El dispositivo más sencillo para ello es el dipolo oscilante. Cualquier sistema en el que exista un desplazamiento periódico de carga a lo largo de una recta, de modo que sus extremos se carguen con signos opuestos, y, periódicamente, se inviertan sus cargas, constituye un dipolo oscilante. Es equivalente a una corriente sinusoidal oscilante en un hilo conductor. Podemos ver fácilmente cómo de este modo se producen los campos **E** y **H**. Esto se ha indicado esquemáticamente en la Fig. 12.11, en la que se ha

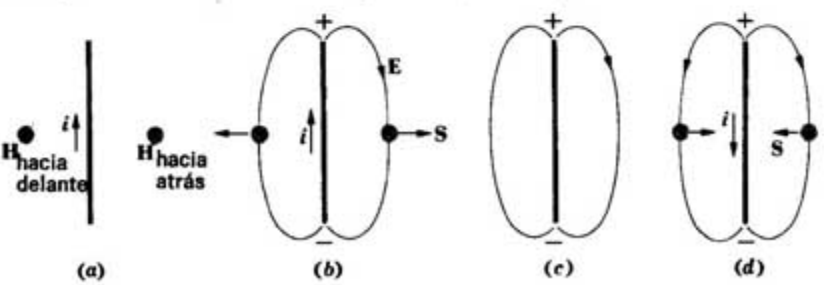


Fig. 12.11 Dipolo oscilante. Se han indicado las fluctuaciones del vector de Poynting durante medio ciclo.

representado el hilo en una serie de instantes a lo largo de medio ciclo de la corriente alterna. En (*a*), pero acaba de empezar una corriente dirigida hacia arriba. La dirección del campo **H** debido a esta corriente puede determinarse mediante el empleo de la regla de la mano derecha, en la figura se ha indicado la intersección con el plano del papel de una de las líneas circulares de **H**. En (*b*) ha transcurrido un cierto tiempo, la corriente aún circula hacia arriba, pero ya han aparecido en los extremos del hilo cargas netas. Esto da lugar a un campo eléctrico, una de cuyas líneas se ha dibujado también en la figura. Al mismo tiempo también se ha representado el vector **S** según el producto $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, indicando que, a medida que tiene lugar la separación de cargas, la energía sale hacia el espacio que rodea el hilo. En el dibujo siguiente (*c*) se representa el instante de separación de carga máxima, en el que la corriente y, por tanto, **H** son cero. Finalmente, en (*d*) la corriente ha cambiado de sentido mientras que la carga aún no lo ha hecho. En este caso el vector de Poynting está dirigido hacia dentro, indicando un retorno de la energía hacia el hilo. A primera vista parece como si el hecho de que **E** y **H** están defasados 90° conduce a la inversión periódica de la dirección de flujo de la energía, y, por consiguiente, a la no existencia de un flujo neto. Esto sería cierto, en efecto, si los campos en un punto cualquiera fuera del dipolo, en un instante dado, dependieran de las distribuciones de carga y corriente en el dipolo en ese mismo instante. Sin embargo, existe un cierto retraso entre el establecimiento de una distribución de carga y corriente dadas y la aparición de los campos subsiguientes en un punto del espacio, retraso que depende de la velocidad c y de la distancia del punto al dipolo. Este retraso es el que da lugar a que parte de la energía existente en la región próxima al dipolo continúe propagándose hacia fuera, aun cuando la distribución de carga y corriente en el dipolo den un vector de Poynting dirigido hacia dentro. En muchos aspectos esto recuerda al caso de generación de ondas superficiales en el agua de un estanque, como consecuencia de una oscilación en uno de sus puntos. Si el movimiento de este punto se transmitiera instantáneamente a todo el estanque no habría ondas.

Una forma bastante diferente de considerar el mismo problema es el examinar los campos de una carga en movimiento en dos casos: primero, cuando se mueve con velocidad constante, y segundo, cuando es acelerada. Veremos que únicamente cuando se aceleran las cargas hay radiación de energía. En la Fig. 12.12 se indican ambos casos. En la parte (*a*) de la figura, una carga positiva está moviéndose con velocidad constante. Se han dibujado algunas de las líneas de **E** radiales, así como la intersección con el plano del papel de las líneas de **H**. También se han dibujado los vectores de Poynting, que

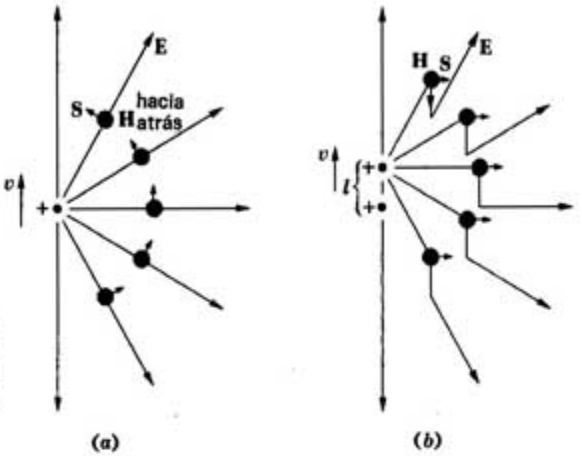


Fig. 12.12 Campo y flujo de energía para una carga en movimiento: (a) Carga que se mueve con velocidad constante; (b) Carga sometida a una aceleración brusca, después de la cual continúa con velocidad constante.

nos indican la existencia de un flujo de energía continuo, de atrás hacia delante, que corresponde al movimiento de la carga. Un cálculo detallado demuestra que este flujo de energía es precisamente igual al que debe corresponder al avance del campo electrostático de la carga, y, por tanto, no conduce a radiación. El caso de una partícula acelerada, como la de la Fig. 12.12*b*, es muy distinto. Hemos supuesto que después de moverse un cierto tiempo con velocidad constante, la partícula es acelerada bruscamente durante un breve intervalo, después de lo cual continúa moviéndose con velocidad constante, pero mayor. Estará, pues, situada a una distancia l más adelante de donde estaría si no hubiera existido este cambio brusco de velocidad. Este proceso introduce un codo en las líneas de **E**, tal como se indica, y en la figura se observa cómo en este caso los vectores **S** muestran la aparición de un flujo de energía electromagnética radial.

12.10 Reflexión y refracción de las ondas electromagnéticas en la superficie límite entre dos dieléctricos

Vamos a dar un ejemplo de la aplicación de las ideas que hemos desarrollado a un problema importante de óptica. Cuando incide un rayo luminoso en la superficie de separación entre dos medios dieléctricos, parte de la energía incidente es reflejada y el resto es transmitida (refractada) al segundo medio. Vamos a considerar únicamente el caso sencillo de incidencia normal. El problema consiste en determinar las intensidades relativas de las ondas reflejada y refractada cuando la onda incidente es normal a una superficie de separación plana. En la Fig. 12.13 se indica la configuración geométrica del problema y las magnitudes que intervienen. La superficie límite entre los dos medios es el plano yz, es decir, $x = 0$. Se han re-

presentado los vectores eléctrico, magnético y de Poynting para las ondas planas incidente (E, H, S), reflejada (E_1, H_1, S_1) y refractada (E', H', S'). Las regiones a cada lado de la superficie límite están caracterizadas por los índices de refracción n_1 y n_2, respectivamente. El índice de refracción empleado en óptica para describir el comportamiento dieléctrico de las sustancias, se define como la relación

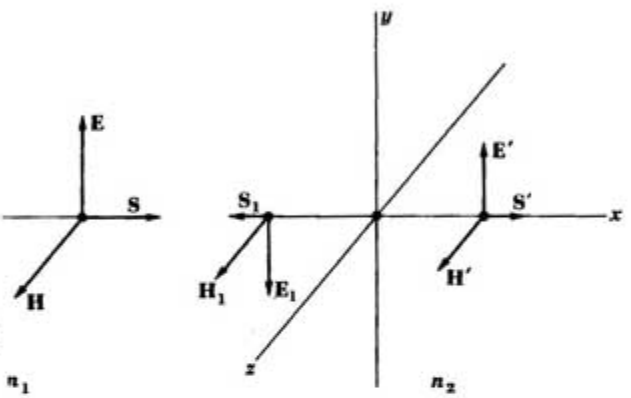


Fig. 12.13 Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas en la superficie de separación entre dos dieléctricos.

entre la velocidad de la luz en el vacío c, y la velocidad en un medio dado v.

$$n = \frac{c}{v} \tag{12.33}$$

Este índice puede relacionarse con las propiedades eléctricas y magnéticas de la sustancia en la forma siguiente. La velocidad de la luz en el vacío es $c = 1/(\epsilon_0\mu_0)^{1/2}$, y en un medio de permitividad ε y permeabilidad μ, es $v = 1/(\epsilon\mu)^{1/2}$. Como la permeabilidad de la mayoría de los cuerpos ópticamente transparentes es muy próxima a la unidad, podemos escribir

$$n = \left(\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{\epsilon\mu_0}{\epsilon_0\mu_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} = K^{1/2}$$

siendo K la constante dieléctrica relativa de la sustancia.

En el diagrama se han dibujado el vector $\mathbf{E}_1$ para la onda reflejada en oposición de fase en el $\mathbf{E}$ incidente, y el $\mathbf{H}_1$ en fase con $\mathbf{H}$. Evidentemente, o bien $\mathbf{E}$, o bien $\mathbf{H}$ deben estar invertidos en la onda reflejada para que el vector de Poynting tenga sentido opuesto. De momento consideremos esta elección como arbitraria.

Otra condición que debe satisfacerse es que la relación entre

los vectores **E** y **H** en cada una de las ondas tenga el valor que antes hemos encontrado,

$$\sqrt{\epsilon}\,E = \sqrt{\mu}\,H \qquad \text{o} \qquad H = n\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E \tag{12.34}$$

Según esto, tenemos

$$H = n_1\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E \qquad H' = n_2\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E' \qquad H_1 = n_1\left(\frac{\epsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2} E_1$$

Finalmente, deben satisfacerse las condiciones en la superficie límite

$$D_{n1} = D_{n2} \qquad B_{n1} = B_{n2}$$

$$E_{t1} = E_{t2} \qquad H_{t1} = H_{t2}$$

En el caso especial de ondas planas normales a la superficie las dos primeras no nos dicen nada puesto que tanto D_n como B_n son cero.

Si aplicamos las condiciones para **E** y **H** y tenemos en cuenta la relación entre **E** y **H** en cada onda, podemos escribir

$$E - E_1 = E'$$

$$H + H_1 = H' \rightarrow n_1 E + n_1 E_1 = n_2 E'$$

Y despejando E_1 y E' en estas ecuaciones

$$E' = \left(\frac{2n_1}{n_2 + n_1}\right) E \qquad \text{y} \qquad E_1 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right) E$$

Si despejamos H' y H_1, obtenemos, análogamente,

$$H' = \left(\frac{2n_2}{n_2 + n_1}\right) H \qquad \text{y} \qquad H_1 = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right) H$$

Si $n_2 > n_1$, E_1 y H_1 son ambos positivos. Esto significa que la hipótesis realizada al asignar los sentidos de E_1 y H_1 era correcta en este caso, y que si $n_2 < n_1$ sus sentidos deben invertirse. El flujo de energía incidente por unidad de área es $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = EH$. Se demuestra que la energía que sale, suma de $E_1H_1 + E'H'$, tiene este mismo valor, por consiguiente, el resultado está de acuerdo con la conservación de la energía.

En el caso general de incidencia oblicua, debe tenerse en cuenta

la dirección de polarización para determinar el reparto de energía entre los rayos reflejado y refractado. Dejaremos este problema, así como otros muchos, para su estudio en óptica.

12.11 Ondas electromagnéticas en guías

El problema de transportar corrientes alternas de un lugar a otro por medio de conductores se hace más y más difícil a medida que aumenta la frecuencia. Esto es debido a dos causas. En primer lugar el efecto pelicular descrito en el Cap. 8. Las corrientes de Foucault tienden a confinar la corriente alterna a una capa superficial del conductor, haciendo que la resistencia efectiva aumente, con lo que aumentan considerablemente las pérdidas de energía en el conductor. La segunda fuente de dificultades reside en el hecho de que la radiación electromagnética aumenta como f^4, lo que da lugar a que una gran parte de la energía sea radiada, en lugar de conducida al lugar deseado. A frecuencias superiores a 3.000 Mc/seg (el límite inferior de la región de las microondas) estos dos efectos descartan completamente el empleo práctico de conductores sencillos para la transmisión de energía eléctrica. Una solución para el problema de la radiación es el empleo de un cable coaxial, tal como el indicado en la Fig. 12.14. La energía de altas frecuencias es transmitida en

Fig. 12.14 Cable coaxial empleado para la transmisión de altas frecuencias.

forma de una onda electromagnética que pasa por el espacio existente entre los dos conductores. Como la radiación no puede atravesar el conductor externo, no hay pérdidas de energía por este motivo. A frecuencias muy elevadas resta, sin embargo, una dificultad. La necesidad de sostener el conductor interno de alguna forma, obliga a rellenar todo o parte del espacio entre los conductores con un material dieléctrico, y precisamente a estas frecuencias muy elevadas la mayoría de los dieléctricos usuales presentan pérdidas, esto es, absorben parte de la energía de las ondas electromagnéticas.

Para las frecuencias de microondas más altas existe una solución elegante para el problema de la transmisión. Es el empleo de guías de onda huecas. Son como los cables coaxiales, salvo que se ha suprimido el conductor central. Mediante un elemento radiante adecuado se establece en la guía una onda electromagnética que viaja por dentro de la guía como una onda plana en el vacío. Sin embargo, existen diferencias impuestas por la necesidad de satisfacer las condiciones eléctricas y magnéticas apropiadas en la superficie del conductor. En general existen varios *modos* o formas distintas de propagación de las ondas electromagnéticas que satisfacen estas condiciones y propagan energía a lo largo de la guía. No obstante, es posible emplear una configuración y dimensiones geométricas tales que, en un intervalo de frecuencias limitado, solo sea posible un modo de propagación. Vamos a discutir uno de estos modos en una guía rectangular, tal como la indicada en la Fig. 12.15.

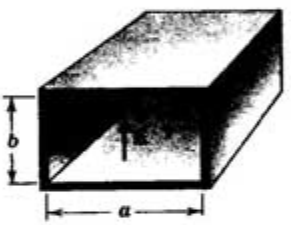


Fig. 12.15 Guía de ondas empleada para la transmisión de microondas.

Para determinar por medio de la teoría electromagnética cuáles son las ondas electromagnéticas que pueden propagarse en un conductor hueco de este tipo, basta combinar las ecuaciones de Maxwell con las condiciones que deben satisfacer los campos en la superficie metálica, obteniéndose así las posibles soluciones. No intentaremos aquí seguir este proceso y nos limitaremos a describir los resultados en un intervalo de frecuencias en el que solo hay una posible solución, que denominaremos el *modo dominante* en la guía. Consideremos en primer lugar la configuración del campo eléctrico oscilante de la onda. Este campo está dirigido según la dimensión menor de la guía, b, lo que significa que se trata de una onda polarizada. En cualquier sección transversal de la guía, E es máximo en la línea central de la misma y disminuye hasta anularse junto a la pared. Esta disminución es consecuencia de que $E_{\parallel}$ debe ser cero en una superficie metálica. (Con esto estamos haciendo la hipótesis de que las paredes son conductores perfectos.) En la Fig. 12.16 se ha indicado esta situación dibujando los vectores campo eléctrico (no las líneas de fuerza). E varía sinusoidalmente a lo largo de la guía, como se indica en la vista lateral. La configuración del campo eléctrico es, pues, muy semejante a la de una onda plana polarizada. Las dos diferencias son: que E llega a anularse en la pared, y que

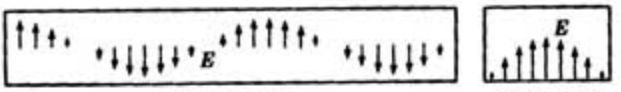


Fig. 12.16 Vectores campo eléctrico en la guía de ondas.

el campo está limitado a la región interior de la guía. Los cambios en el campo magnético son más grandes. En todos los puntos es aún perpendicular a E, como en una onda plana, pero como consecuencia de las condiciones en la superficie límite las líneas de B son cerradas y están situadas en planos paralelos a los lados mayores de la guía.

Estas condiciones en la superficie exigen que para un campo B variable, $B_\perp$ debe anularse en la superficie de un conductor. Esto se deduce inmediatamente de la condición de que $E_\parallel$ se anule. En efecto, podemos razonar que como B debe ser normal a E (según las ecuaciones de Maxwell, y como vimos que ocurría en una onda plana), si $E_\parallel$ se anula, $B_\perp$ debe hacerlo también. El efecto de la superficie conductora es, pues, modificar la onda plana ilimitada de modo que las líneas de B, que solo se cerraban en el infinito, se cierren realmente dentro de la guía. En la Fig. 12.17 se indican las

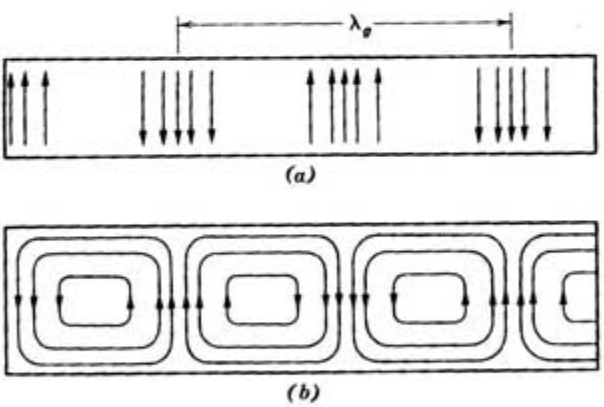


Fig. 12.17 Líneas de E y B en las guías de ondas: (a) Líneas de E vistas lateralmente; (b) líneas de B vistas desde arriba.

líneas de B y E de una onda en la guía. Calculando el vector de Poynting $\mathbf{S} = (1/\mu_0)(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ se comprueba que la onda se propaga hacia la derecha.

Dos aspectos importantes de la propagación de ondas electromagnéticas en guías son que la velocidad con que se transmite la energía a lo largo de la guía es distinta de c, la velocidad de propagación en el vacío, y que para cada modo de propagación existe una frecuencia perfectamente definida por debajo de la cual la propagación no puede tener lugar. En una onda electromagnética en el vacío, se cumple la relación $\lambda\nu = c$, siendo c la velocidad de la luz. Sin embargo, si medimos la longitud de onda en la guía λ_g,

encontramos que para una frecuencia dada λ_g es mayor que la obtenida en el vacío. (Esta medida puede realizarse consiguiendo un sistema de ondas estacionarias al reflejar la onda en uno de los extremos de la guía.) Para el modo de propagación que estamos considerando aquí λ_g está relacionado con λ en el vacío por la ecuación

$$\lambda_g = \frac{\lambda}{[1 - (\lambda/2a)^2]^{1/2}} \tag{12.35}$$

siendo a la mayor dimensión transversal de la guía.

A primera vista resulta sorprendente que $\lambda_g > \lambda$ implica aparentemente una velocidad en la guía mayor que la velocidad de la luz en el vacío, en contradicción directa con la teoría de la relatividad. Sin embargo, la limitación relativista de velocidades se refiere únicamente al transporte de masa o energía. En una guía de ondas, o en cualquier caso en que la velocidad depende de la frecuencia, debemos considerar dos tipos de velocidad. La primera, es la *velocidad de fase* v_f, medida determinando la distancia entre picos sucesivos de la onda, que es la que nos conduce al valor de λ_g, la longitud de onda en la guía. La otra, es la velocidad con que se propaga la energía, que podemos obtener enviando un impulso de energía corto a lo largo de la guía, y midiendo el tiempo que tarda en recorrer una cierta distancia. Esta es la llamada *velocidad de grupo* v_{gr}. En el vacío $v_f = v_{gr}$, pero, en general,

$$v_f v_{gr} = c^2$$

Como la velocidad de fase en la guía es mayor que c, se deduce que la velocidad de grupo es menor que c. De la Ec. (12.35) se desprende que si la longitud de onda en el vacío llega a ser igual a $2a$, la longitud de onda en la guía se hace infinita y v_{gr} se anula. Esto es, la energía no puede transmitirse a lo largo de la guía para frecuencias menores que la correspondiente a $\lambda = 2a$. Este valor límite se denomina *frecuencia de corte*.

PROBLEMAS

12.1 Partiendo de las Ecs. (12.19) y (12.20) que relacionan las variaciones espaciales y temporales de **E** y **H**, demostrar que

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

12.2 Demostrar que la ecuación diferencial del Prob. 12.1 admite como solución,

por ejemplo, una onda sinusoidal en H_z que se propague en la dirección negativa del eje x, si la velocidad viene dada por

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

12.3 Un generador de alterna está conectado a un condensador plano cuyas armaduras son discos circulares de área A. Como consecuencia, la carga sobre las placas vale $q = q_0 \operatorname{sen} \omega t$. Las líneas de **H** debidas a la corriente de desplazamiento son círculos cuyo centro se halla sobre el eje de simetría del condensador. Demostrar que la intensidad del campo magnético en un punto cualquiera situado entre las placas viene dada por la expresión

$$H = \frac{q_0 r \omega}{2A} \cos \omega t$$

siendo r la distancia al eje de simetría. Despréciese la influencia de los bordes.

12.4 Calcular las frecuencias de las ondas electromagnéticas que en el vacío tienen las longitudes de onda siguientes:

a) 10^3 m (ondas largas de radio).
b) 1 m (ondas cortas de radio).
c) 3 cm (microondas).
d) 10^{-4} m (infrarrojo).
e) 5.000 A (visible) (1 angstrom = 10^{-10} m).
f) 0,1 A (rayos X).
g) 10^{-2} A (rayos gamma).

12.5 Una onda de radio plana se propaga en la dirección x y está polarizada de forma que su vector eléctrico tiene la dirección y. Si su frecuencia es 1 Mc/seg, y la potencia media transmitida por la onda es de 20 watts/m^2, calcular:

a) La longitud de onda.
b) Las amplitudes de **E** y **H** para esta onda.

12.6 Demostrar que si se emplea para describir la propagación de una onda, su *número de ondas* $k = 2\pi/\lambda$ y su pulsación ω, la Ec. (12.24) toma la forma

$$E_y = E_0 \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

12.7 La luz solar llega a la tierra, fuera de su atmósfera, con una intensidad de 2,0 cal/cm^2-min. Calcular las amplitudes de **E** y **B** para esta luz al llegar a la tierra.

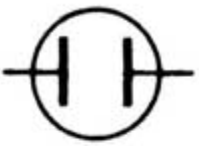
12.8 Hallar la frecuencia mínima para que una onda electromagnética pueda transmitirse por una guía rectangular cuya dimensión interna perpendicular a **E** es 1 cm.

12.9 Una guía rectangular tiene una anchura de 1 cm (perpendicular al campo **E**). Para el modo dominante [en el cual se cumple la Ec. (12.35)], ¿cuál será la longitud de onda en la guía de una onda electromagnética cuya longitud de onda en el vacío es 1,25 cm? ¿Cuál es la velocidad de fase de esta onda en la guía? ¿Cuál es la velocidad de grupo con la que se propaga la energía en la guía?

12.10 Demostrar que, a las frecuencias en que se usan normalmente las válvulas de vacío, la corriente de desplazamiento es despreciable comparada con la corriente debida a los electrones. Tómese, por ejemplo, una válvula en la que el cátodo y la placa tienen cada uno 1 cm^2 de área, la distancia entre ellos es 5 mm, y circula una corriente cuya intensidad eficaz es 10 ma a una frecuencia de 10^6 ciclos/seg. Supóngase que los electrodos son paralelos y que el cátodo está a una tensión fija. La diferencia de tensión entre los electrodos de la válvula es de 100 volts eficaces. ¿Cuál es el valor eficaz de la corriente de desplazamiento en la válvula?

TRECE

Conducción de la Electricidad en los Gases y Magnetohidrodinámica



13.1 Introducción

Vamos a ver en este capítulo la aplicación de las leyes de la electricidad y el magnetismo a dos campos importantes de la física. Consideraremos en primer lugar la conducción de la electricidad en los gases. Siempre que en un gas estén presentes iones y electrones pueden circular corrientes como resultado de la aplicación de un campo eléctrico exterior. Cuando los campos son bastante intensos, los electrones pueden ganar energía suficiente para ionizar los átomos o moléculas del gas como resultado de sus choques con ellas, y pueden tener lugar una serie de procesos por los que se generan continuamente iones y electrones. Según las condiciones, puede aparecer en el gas, una *descarga luminosa*, o una *descarga en corona*, o bien una *chispa*. Vamos a discutir los procesos atómicos que tienen lugar en estos fenómenos y a resumir brevemente las condiciones en las que ocurre cada tipo de descarga.

En la segunda parte del capítulo estudiaremos la magnetohidrodinámica. Es evidente que debe existir una gran interacción entre los campos magnéticos y el movimiento de un fluido muy conductor (tal como un gas ionizado que contiene cargas positivas y negativas en igual número). Esta interacción modifica el movimiento

del fluido y da lugar a una gran variedad de fenómenos de interés en astrofísica y geofísica. También presentan importancia en el problema de liberar energía por fusión termonuclear. Empezaremos por examinar, extendiendo lo tratado en la Sec. 6.7, el movimiento de cargas aisladas en un campo magnético. Así veremos cómo pueden explicarse, gracias a las fuerzas magnéticas, las bandas de Van Allen en la ionosfera, que se descubrieron recientemente y están formadas por partículas cargadas capturadas por el campo terrestre. A continuación estudiaremos el papel de las fuerzas magnéticas en los fluidos conductores y cómo pueden aparecer ondas magnetohidrodinámicas en el fluido. Finalmente, analizaremos brevemente la forma de retener fluidos mediante campos magnéticos, problema que tiene la máxima importancia en el desarrollo práctico de la energía termonuclear.

13.2 Procesos en campos débiles

El paso de electricidad en los gases depende de la existencia de portadores de carga (electrones e iones + y −). Así, pues, si los campos aplicados son débiles, la corriente que pasa entre unos electrodos introducidos en una masa gaseosa depende de los iones y electrones presentes normalmente en el gas, como resultado de la ionización provocada por los rayos cósmicos u otras fuentes de radiación de alta energía. Estas corrientes pueden, por tanto, aumentarse si se utiliza una fuente artificial de ionización como los rayos X. El movimiento de los portadores de carga por efecto del campo es interrumpido por los choques elásticos con los átomos y moléculas del gas. Por choques elásticos entendemos aquellos en que se conserva la energía.

El movimiento que los portadores de carga tienen al aplicar un campo eléctrico se suele describir mediante la llamada *movilidad* μ, de la partícula que se define mediante la ecuación

$$v_d = \mu E \tag{13.1}$$

en la que v_d es la velocidad media de deriva en la dirección del campo E. La movilidad depende de la sección eficaz de choque de las partículas cargadas con los átomos del gas y de las masas y cargas de unos y otros. Puede introducirse la movilidad en una forma muy semejante a la utilizada en relación con la resistividad de un metal en la Sec. 7.3. Vimos allí que la velocidad de deriva de los electrones en un metal viene dada por

$$v_d = \frac{e}{m}\tau E \tag{7.7a}$$

siendo τ el tiempo medio de relajación. Comparando las Ecs. (13.1) y (7.7*a*), resulta para la movilidad

$$\mu = \frac{e}{m}\tau \tag{13.2}$$

La movilidad de los electrones e iones en un gas depende del tiempo de relajación, que a su vez está determinado por las *secciones eficaces de choque* y por la presión del gas. La sección eficaz de choque nos mide la distancia a que una partícula debe aproximarse a otra para que su trayectoria sea desviada en forma apreciable. Por ejemplo, la sección eficaz de choque de una bola de billar con una partícula pequeña (de tamaño despreciable comparado con el de la bola de billar) sería el área de la sección transversal de la bola. En el caso que nos ocupa las fuerzas eléctricas entre partículas conducen a un resultado no tan simple. Las secciones eficaces para los choques entre los electrones y los átomos varían notablemente para los distintos tipos de átomos y también depende mucho de la velocidad de los electrones. La movilidad de los iones también varía con el tipo de átomo de que se trate.

Las movilidades iónicas pueden determinarse directamente midiendo la corriente que atraviesa el gas cuando se le aplica un campo débil. Uno de los métodos consiste en producir iones en las proximidades de un electrodo, en la forma que se indica en la Fig. 13.1,

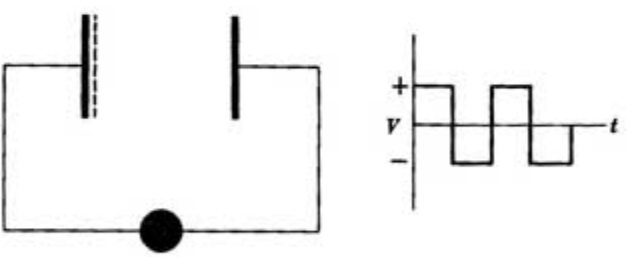


Fig. 13.1 Aparato para medir la movilidad de los iones en un gas. Los iones son producidos cerca de uno de los electrodos por una fuente de ionización externa. La tensión aplicada tiene forma de onda cuadrada.

mientras se aplica una tensión en forma de onda cuadrada entre los dos electrodos. Si el campo aplicado es pequeño, los iones producidos mediante los rayos X en las proximidades de un electrodo no pueden llegar a alcanzar el electrodo opuesto antes de que se invierta la tensión aplicada y no son, por tanto, recogidos por este electrodo. A medida que se aumenta gradualmente la amplitud de la onda cuadrada, la velocidad de deriva crece y llega un momento en que los electrones consiguen alcanzar el electrodo colector. Calculando E y determinando el tiempo durante el que se aplica la tensión aceleradora pueden calcularse la movilidad y la velocidad de deriva.

Las movilidades gaseosas varían desde décimas de cm^2/volt-seg

para los iones moleculares pesados hasta alrededor de 10 cm^2/volt-seg para el H_2^+ a la presión atmosférica y temperatura ambiente. Como a temperatura constante el tiempo entre colisiones es inversamente proporcional a la presión del gas, la movilidad resulta también inversamente proporcional a la presión. Las radiaciones ionizantes producen tanto iones positivos como negativos. Los iones negativos son el resultado de la captura de un electrón por una molécula neutra. También existen una serie de procesos por los cuales los iones positivos se recombinan con iones negativos o electrones para formar átomos o moléculas neutras. Como la velocidad de recombinación depende de la densidad de partículas cargadas, el proceso de recombinación es de naturaleza exponencial.

Cuando se tiene una fuente de ionización constante (por ejemplo, un haz de rayos X) y se aplica un campo estacionario entre los electrodos, pasa una cierta corriente que resulta de ser recogidos los iones por ellos. La intensidad de esta corriente depende de velocidad de producción de los iones, de la velocidad de recombinación y de la posible difusión de alguno de estos iones fuera de la región entre los electrodos mediante los que se establece el campo. Si el campo aplicado es pequeño la corriente resulta proporcional a la tensión, pero al aumentar ésta la intensidad aumenta más lentamente (Fig. 13.2). Este efecto de saturación es consecuencia de que la velocidad de producción de iones sea constante. En el momento en que todos los iones producidos llegan a alcanzar los electrodos, la intensidad ya no puede crecer más en tanto no intervengan otros procesos secundarios que estudiaremos en la próxima sección.

13.3 Procesos en campos intensos. Ionización por choque

Si la tensión aplicada entre dos placas paralelas situadas en el gas sometido a una fuente de radiación, como vimos antes, se hace aumentar más allá de los valores indicados en la Fig. 13.2, la curva intensidad-tensión aumenta de pendiente rápidamente, y si aumenta aún más la tensión tiene lugar un aumento muy brusco de la intensidad en forma de una *chispa*. La aparición de este aumento rápido de la corriente indica que empieza a tener lugar la *ionización por*

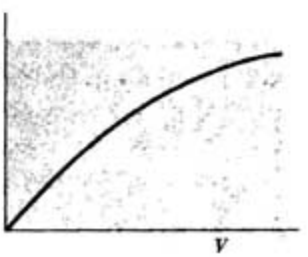


Fig. 13.2 Efecto de saturación en la corriente que atraviesa el gas con campos débiles. Los iones y electrones portadores de la corriente son producidos por una fuente externa.

choque. La tensión a la que esto ocurre depende de la forma de los electrodos y su distancia, y del tipo de gas y su presión. Las condiciones para que tenga lugar este proceso se alcanzan cuando el valor de E/p, siendo E el campo aplicado y p la presión del gas, llega a un valor crítico que depende del tipo de gas. En realidad concurren varios procesos diferentes, pero todos ellos están caracterizados por el hecho de que los portadores de carga para campos superiores al valor crítico adquieren entre dos choques energía suficiente para provocar la ionización con lo que se incrementa el número de iones presente en el gas.

Podemos ver fácilmente por qué el comienzo de este proceso depende de E/p. En efecto, supongamos que se ha alcanzado el campo crítico para una presión determinada, de modo que los iones son acelerados entre dos choques lo bastante para iniciar un proceso secundario de ionización. Si la presión se hace doble, con lo que se reduce el recorrido libre medio entre choques por un factor de dos, debe aplicarse también un campo doble para que los iones adquieran la misma energía que ganaban a menor presión. Por tanto, cualquiera que sea el proceso secundario, el campo crítico depende de la relación E/p. En el aire y a la presión atmosférica el campo crítico es de unos 15.000 volts/cm, es decir, $E/p = 20$, si se expresa el campo en volts/cm y p en milímetros de mercurio. En la Tabla 13.1 se dan los valores críticos aproximados de E/p para otros gases.

***Tabla 13.1** Valores de E/p, en volts/cm/mm de presión, que conducen a ionización por choque*

Gas	*E/p*
Aire	20
H_2	10
A	5
Ne	2

Vamos ahora a examinar los principales mecanismos de ionización secundaria. El más importante de ellos, y el primero que tiene lugar al ir aumentando el campo aplicado, es la ionización por choque de electrones. Para el valor crítico de E/p algunos de los electrones adquieren energía cinética suficiente del campo aplicado para producir ionización cuando chocan con un átomo o molécula. Esto es, se expulsa un electrón del átomo, quedando un ion positivo y

apareciendo un electrón adicional. Por tratarse de un proceso al azar, ambos electrones pueden dar lugar a un choque con ionización al final de su recorrido libre siguiente, produciendo otros dos iones positivos y otros dos electrones. Este mecanismo puede continuar dando lugar a una avalancha de electrones iniciada por un solo electrón. Es fácil deducir la forma en que tiene lugar este tipo de aumento. Supongamos que llamamos α al número de electrones a que da lugar un electrón que se desplaza 1 cm en la dirección de la fuerza debida al campo aplicado. El aumento dn del número de electrones en una distancia dx debido a n electrones será, pues,

$$dn = n\alpha\, dx \tag{13.3}$$

Si escribimos esta expresión en la forma $dn/n = \alpha\, dx$, e integramos, nos resulta $\ln n = \alpha x + \ln \text{cte}$. Si hemos partido de un número de electrones original, n_0, en el punto $x = 0$, resulta que la constante vale precisamente n_0, y podemos escribir

$$\frac{n}{n_0} = e^{\alpha x} \tag{13.4}$$

Como la intensidad de la corriente es proporcional al número de electrones presente, también podemos escribir

$$i = i_0 e^{\alpha x} \tag{13.5}$$

la constante α se denomina *primer coeficiente de Townsend*, representa el aumento de corriente debido a la ionización y en realidad no es constante, sino que varía con E/p.

Para valores grandes de E/p pueden presentarse otros dos procesos que vamos a considerar a continuación. El primero es la liberación de fotoelectrones en el cátodo (electrodo negativo). El efecto fotoeléctrico se discutirá con detalle en el Cap. 14. En este momento basta que señalemos que las ondas electromagnéticas (luz) de energía suficientemente elevada son capaces de comunicar a un electrón de la superficie de un metal la energía necesaria para que escape. En el curso de los choques puede ocurrir que un electrón que no es capaz de ionizar un átomo le comunique bastante energía para dejarlo en un *estado excitado*. Incluso un electrón de mucha energía puede no solo ionizar un átomo, sino también dejar el ión en un estado excitado. Un estado excitado sería, por ejemplo, aquel en el que un electrón, arrancado de su órbita normal, pasa a otra órbita de mayor energía. Después de un cierto intervalo, generalmente muy corto, este electrón vuelve a caer a su órbita normal, y el exceso de energía es emitido en forma de energía electromagnética. Si esta

energía incide sobre el cátodo, puede conseguir arrancar un electrón que a su vez sea capaz de formar su propia avalancha de electrones a medida que viaja a través del gas. El ánodo también emite electrones, pero el campo aplicado los empuja de nuevo hacia el electrodo.

Otro proceso secundario es consecuencia del choque de iones positivos con el cátodo. Parte de la energía cinética del ion positivo puede transmitirse a un electrón de la superficie metálica, permitiendo en algunos casos que escape hacia el gas. Como en el caso anterior, este electrón puede dar lugar a otros formando una avalancha.

En el Apéndice E estudiaremos la naturaleza de la corriente que pasa cuando tienen lugar ambos procesos de multiplicación primario y secundario. Si n_0 es la velocidad con que se producen electrones cerca del cátodo por una fuente externa de ionización, n el número total de electrones por segundo que llegan al ánodo, y γ la probabilidad de que se libere un electrón secundario en el cátodo por un proceso secundario desencadenado por cada multiplicación primaria, resulta

$$n = n_0 \frac{e^{\alpha z}}{1 - \gamma e^{\alpha z}} \tag{E.2}$$

o bien

$$i = i_0 \frac{e^{\alpha z}}{1 - \gamma e^{\alpha z}} \tag{E.3}$$

Esta expresión nos da el criterio que determina la posibilidad de una descarga automantenida en el gas. A medida que el denominador se aproxima a cero, la corriente i aumenta, y finalmente se llega a una situación en la que pasa corriente independientemente de la existencia de una corriente i_0. El criterio que conduce a la *tensión de ruptura*, o descarga automantenida, es entonces precisamente

$$1 - \gamma e^{\alpha z} = 0 \quad \text{o} \quad \gamma e^{\alpha z} = 1 \tag{13.6}$$

Esto significa que, a partir de un solo electrón, en el cátodo se producen suficientes pares de iones en el proceso de multiplicación para que al menos aparezca un nuevo electrón junto al cátodo por un proceso secundario. De este modo el proceso de multiplicación resulta automantenido. Según el tipo de descarga, esto conduce a una descarga luminosa, a una corona, a un arco, o a una chispa que reduce a cero prácticamente la resistencia entre los electrodos.

13.4 La descarga luminosa

La descarga luminosa tiene lugar en los gases a presiones menores que la atmosférica, aproximadamente entre 100 mm de Hg y 0,1 mm de presión. Este fenómeno se caracteriza por una gran luminosidad del gas en la región catódica y una luminosidad menos intensa del gas en todo el espacio entre los electrodos. El proceso de multiplicación primaria tiene lugar cerca del cátodo, y los electrones secundarios se producen en el cátodo por bombardeo de iones positivos. Los detalles de la descarga luminosa son bastante complicados, debido a la distorsión del campo eléctrico uniforme por efectos de carga espacial. En la masa principal del gas las cargas positivas y negativas están en casi igual número, y el campo es lo suficientemente débil para que no tenga lugar apenas el proceso de multiplicación. La descarga luminosa está también caracterizada por la emisión de luz ultravioleta. Las lámparas fluorescentes son tubos de descarga en los que esta luz ultravioleta se convierte en luz visible en una sustancia fluorescente que recubre la pared del tubo, que encierra el gas.

13.5 La descarga en corona

En la descarga en corona, uno de los electrodos es puntiagudo. Esto da lugar a una región de campo eléctrico muy intenso en las proximidades de la punta, en la que se origina el proceso activo. Si la punta es positiva, los electrones atraídos hacia esta región de campo eléctrico intenso cerca de la punta ionizan muchos átomos, y aparece una región de carga espacial elevada como resultado de que los iones positivos más pesados se mueven lentamente y quedan rezagados respecto a los electrones que se mueven mucho más rápidamente. Como consecuencia, el campo original resulta muy distorsionado localmente. Además, la región de ionización intensa emite radiación ultravioleta, como consecuencia del proceso de excitación que tiene lugar simultáneamente con el proceso de ionización. Por consecuencia, la ionización secundaria puede tener lugar no solo en el electrodo opuesto, sino también en la masa del gas. Como resultado de esta ionización secundaria y de los grandes efectos locales de carga espacial, pueden propagarse descargas en la región entre electrodos aun cuando con el campo original no perturbado no llegaría a producirse ionización. Este tipo de descarga está formado por trayectorias filiformes de elevada ionización que son luminiscentes, y que resultan de ambos procesos de multiplicación primario y secundario. En ciertas condiciones estas líneas de gran ionización pueden llegar a alcanzar el electrodo opuesto, con lo que constituyen un camino de resistencia muy baja que conduce a una chispa o arco de gran intensidad.

En la corona de una punta negativa, los electrones adquieren energía rápidamente tan pronto como abandonan la punta como consecuencia del bombardeo de iones positivos o de radiación ultravioleta. En esta región de campo intenso aparece una gran ionización tanto por el proceso de multiplicación primaria como por la ionización secundaria. En ciertas condiciones también se forman líneas luminosas en la región próxima a la punta. Los procesos en estas descargas en corona son muy complicados; frecuentemente aparecen corrientes intermitentes como resultado del movimiento relativamente lento de la carga espacial de iones positivos, que puede alterar muchísimo la distribución del campo eléctrico.

13.6 La descarga en arco

En contraste con la descarga luminosa o la descarga en corona, en el arco la producción de electrones secundarios en el cátodo es usualmente un proceso térmico. Al chocar con el cátodo los iones positivos en gran número pierden su energía cinética, y como consecuencia la temperatura del cátodo aumenta hasta el punto que resulta posible la emisión termoiónica de electrones. Las descargas en arco se caracterizan por intensidades muy grandes, con frecuencia de muchos amperes, y una tensión entre electrodos relativamente baja, y porque pueden tener lugar a la presión atmosférica.

13.7 Movimiento de partículas en un campo magnético

Vamos ahora a pasar a discutir algunas cuestiones sobre magnetohidrodinámica. Antes de emprender el estudio del movimiento de un fluido ionizado, o *plasma*, en un campo magnético, vamos a examinar el movimiento de iones individuales, completando así los casos más sencillos estudiados en el Cap. 6.[1] Supondremos que los iones pertenecen a un gas a presión extremadamente baja, con lo que es posible despreciar el efecto perturbador de los choques sobre el movimiento de los iones.

La fuerza que actúa sobre una partícula cargada en un campo magnético vimos que valía

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{6.25}$$

siendo e su carga y $\mathbf{v}$ su velocidad. Esta fuerza origina un movimiento circular si $\mathbf{v}$ tiene una componente perpendicular al campo

[1] Esta discusión sigue muy de cerca a la de Lyman Spitzer, Jr., «Physics of Fully Ionized Gases», Interscience Publishers, Inc., Nueva York, 1959.

magnético de inducción **B**. La velocidad angular de este movimiento es

$$\omega_c = \frac{eB}{m} \tag{6.26}$$

siendo ω_c la llamada frecuencia del ciclotrón. En general, si la velocidad tiene componentes tanto paralela como perpendicular al campo magnético, podemos escribir

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

descomponiendo la velocidad en estas dos componentes. La velocidad $v_{\parallel}$, según la Ec. (6.25) no resulta afectada por el campo magnético, de modo que esta componente es constante. El radio de curvatura correspondiente a la componente perpendicular viene dado por $r = v_{\perp}/\omega_c$, o sea

$$r = \frac{mv_{\perp}}{eB}$$

de modo que este radio depende únicamente de la componente perpendicular de la velocidad. Combinando estos dos movimientos vemos que en general el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme es una hélice de paso constante, con el eje de la hélice dirigido según el campo.

Vamos ahora a considerar el movimiento en presencia de una gran variedad de causas perturbadoras. Como hemos visto que pueden separarse las componentes del movimiento en la dirección del campo magnético y en dirección perpendicular, no tendremos en cuenta en lo que sigue el posible movimiento uniforme paralelo al campo. En primer lugar, vamos a considerar el caso de la existencia de un campo eléctrico uniforme **E** perpendicular al campo magnético uniforme de inducción **B**. Sea **v** la velocidad de la partícula perpendicular a **B**. Escribiremos primero la ecuación que da la fuerza total que actúa sobre la partícula cargada,

$$F = e[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \tag{13.7}$$

que combina la fuerza de origen magnético de la Ec. (6.25) con la fuerza eléctrica dada por la Ec. (2.3). Según la ley de Newton, podemos escribir

$$m\frac{dv}{dt} = e[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \tag{13.8}$$

La forma más sencilla de resolver esta ecuación resulta ser el hacer la sustitución

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \tag{13.9}$$

Esto se hace porque veremos que el movimiento perpendicular a **B** puede describirse como composición de un movimiento circular con velocidad $\mathbf{v}'$ y un movimiento de traslación con velocidad uniforme $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2$. El procedimiento de solución, evidentemente, no es general, y solo será útil si somos capaces de hallar la sustitución adecuada, pero en este caso resulta por ello plenamente justificado su empleo. Así, pues, si sustituimos el valor de $\mathbf{v}$ según la Ec. (13.9) en la Ec. (13.8), obtenemos

$$m\frac{dv'}{dt} = e[\mathbf{E} + (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}) + \frac{1}{B^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}] \tag{13.10}$$

El significado de $(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ puede entenderse examinando la Fig. 13.3. Si **E** está dirigido según el eje x y **B** está según el eje y,

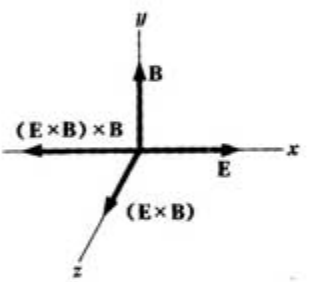


Fig. 13.3 Diagrama para ilustrar el sentido del vector $(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$.

el vector $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ está dirigido según z. Multiplicando este vector vectorialmente por **B**, el vector resultante estará dirigido en el sentido negativo del eje x. Por tanto, $(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2\mathbf{E}$, o sea

$$\frac{1}{B^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{E}$$

La sustitución reduce, pues, la Ec. (13.10) a

$$m\frac{dv'}{dt} = e(\mathbf{v}' \times \mathbf{B}) \tag{13.11}$$

Como esta ecuación tiene la misma forma que la (6.25) para el movimiento de una carga en un campo magnético solo, vemos que $\mathbf{v}'$ corresponde a un movimiento circular simple. Sin embargo, la velocidad total corresponde a este movimiento superpuesto a un movimiento de deriva uniforme perpendicular a **E** y a **B** (en la dirección z de la Fig. 13.3). El módulo de la velocidad de deriva $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})/B^2$ es E/B. El aspecto del movimiento total se indica en

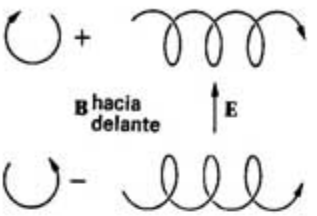


Fig. 13.4 Efecto de un campo eléctrico sobre el movimiento circular de partículas cargadas en un campo magnético uniforme. Como se indica se superpone al movimiento circular un movimiento de deriva.

la Fig. 13.4, y resulta notable que un campo eléctrico aplicado en una dirección dada produzca una deriva en una dirección perpendicular a **E**. En el caso más general en que **E** tenga una componente paralela a **B**, esta componente da lugar a una aceleración en el movimiento, de otro modo uniforme, en dirección paralela a **B**.

Otro caso de interés es el de un campo gravitatorio perpendicular a un campo magnético **B** uniforme. En contraste con el caso anterior de campo eléctrico, la fuerza adicional $mg_\perp$, componente de la fuerza gravitatoria perpendicular a **B**, no depende del signo de la carga. Si hacemos el cambio apropiado la velocidad de deriva resulta ser

$$v_D = \frac{mg_\perp}{eB} = \frac{g_\perp}{\omega_c} \tag{13.12}$$

La velocidad de deriva tiene la dirección y sentido de $\mathbf{g}_\perp \times \mathbf{B}$ para una partícula positiva y sentido opuesto para una partícula negativa. En la Fig. 13.5 se indica cómo es el movimiento

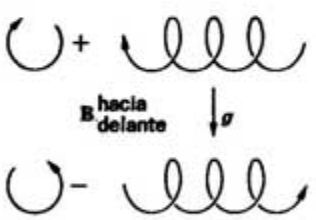


Fig. 13.5 Efecto de un campo gravitatorio sobre el movimiento circular de partículas cargadas en un campo magnético uniforme. El contraste con el caso de campo eléctrico es debido a que la fuerza gravitatoria es independiente del signo de la carga.

El último caso que consideraremos es el de movimiento de cargas en un campo no-homogéneo. En la Fig. 13.6 se indica el tipo

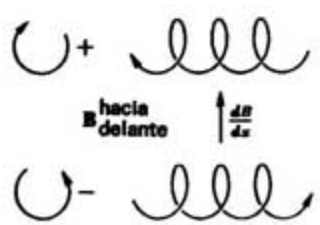


Fig. 13.6 El movimiento de deriva puede ocurrir también si la intensidad del campo magnético varía en una dirección perpendicular al campo.

de movimiento que resulta cuando **B** varía linealmente en la dirección del eje x que es normal a **B**. Cualitativamente resulta que en este movimiento la curvatura es mayor en la región de campo magnético más intenso y menor en las de campo débil. Como consecuencia el movimiento que sería circular en un campo uniforme resulta distorsionado como se indica. No intentaremos realizar el estudio cuantitativo de este caso.

A continuación, vamos a discutir el caso interesante de movimiento de partículas en una región en la que las líneas de fuerza son convergentes. Esto es, que **B** aumenta a medida que nos movemos a lo largo de las líneas de fuerza. Como paso previo, vamos a ver un teorema importante, aplicable a esta situación, referente al movimiento circular de una partícula cargada en un campo magnético. Este teorema dice que si **B** varía lentamente de unos puntos a otros y en el tiempo, el momento magnético que resulta del movimiento de la partícula en el campo es constante. Sea μ este momento magnético, podremos escribir

$$\mu = iA = e\frac{\omega_c}{2\pi}\pi r^2 = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp{}^2}{B} \tag{13.13}$$

Vamos a probar el teorema en primer lugar para un campo uniforme en el espacio, pero variable con el tiempo. La derivada del flujo que atraviesa la trayectoria circular da lugar a una fem inducida $\mathcal{E}$, que según la ley de Faraday nos vendrá dada por

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int \frac{dB}{dt}\,dA \tag{12.1}$$

La potencia (trabajo por unidad de tiempo) suministrada a la carga en movimiento valdrá

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\perp{}^2\right) = \mathcal{E}i = \frac{e\omega_c}{2\pi}\pi r^2\frac{dB}{dt} \tag{13.14}$$

Para obtener este resultado se ha calculado $\mathcal{E}$ por la Ec. (12.1) y se ha sustituido $i = e\omega_c/2\pi$, que es la corriente equivalente a la carga que circula. Comparando con la Ec. (13.13) se encuentra

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\perp{}^2\right) = \mu\frac{dB}{dt} \tag{13.15}$$

Si multiplicamos la Ec. (13.13) por B, obtenemos $\mu B = {}^1/_2 mv_\perp{}^2$, y derivando con respecto al tiempo, resulta

$$\frac{d}{dt}(\mu B) = \mu\frac{dB}{dt} + B\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\perp{}^2\right)$$

Pero, según la Ec. (13.15), el término $B\,d\mu/dt$ debe ser igual a cero. Así, pues, μ es constante y hemos demostrado lo que pretendíamos.

Pasemos ahora al caso de **B** constante en el tiempo, pero creciente a medida que nos movemos a lo largo de las líneas de **B**. En la Fig. 13.7 se indica la trayectoria helicoidal que sigue la partícula

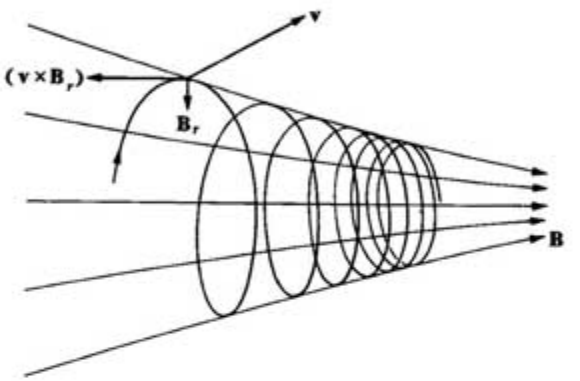


Fig. 13.7 Trayectoria helicoidal de una partícula cargada en un campo magnético convergente. La fuerza ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}_r$) *frena el movimiento de deriva en la dirección del campo.*

cargada en un campo magnético convergente, y vamos a analizar la naturaleza del movimiento en este caso. No vamos a demostrar que también se cumple que el momento magnético del movimiento circular es constante, siempre que las variaciones de B para distancias comparables al radio del movimiento circular sean pequeños.

Siempre que exista una componente radial de B_r, dirigida hacia la línea central de la trayectoria helicoidal, habrá una fuerza que tiende a decelerar el movimiento según el eje de la hélice, cuyo valor es ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}_r$). Esta fuerza tiende a reducir la velocidad de deriva en la dirección del campo. Vamos a demostrar que el movimiento en la dirección del campo va disminuyendo hasta anularse y después se invierte. Las líneas de **B** convergentes actúan como reflejando la partícula (de ahí el nombre de *espejo magnético*). Sin embargo, por ser la fuerza magnética siempre perpendicular a la velocidad de la partícula, no se realiza trabajo sobre ella y la velocidad permanece constante en módulo. Por tanto, si llamamos $\mathbf{v}$ a la velocidad de la partícula, $\mathbf{v}_D$ a la componente de la velocidad según el eje de la hélice y $\mathbf{v}_\perp$ a la componente perpendicular a este eje, tendremos

$$\mathbf{v} = \text{cte} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_D \tag{13.16}$$

De modo que a medida que disminuye $\mathbf{v}_D$ debe aumentar $\mathbf{v}_\perp$ para que $\mathbf{v}$ pueda mantenerse constante en módulo. La Ec. (13.13) del momento magnético del movimiento circular nos permite deducir

que, si μ ha de permanecer constante, $v_\perp{}^2/B$ también debe serlo, y, por tanto, la variación de $v_\perp{}^2$ es proporcional a la variación de **B**. Si llamamos θ al ángulo que forma la trayectoria helicoidal con

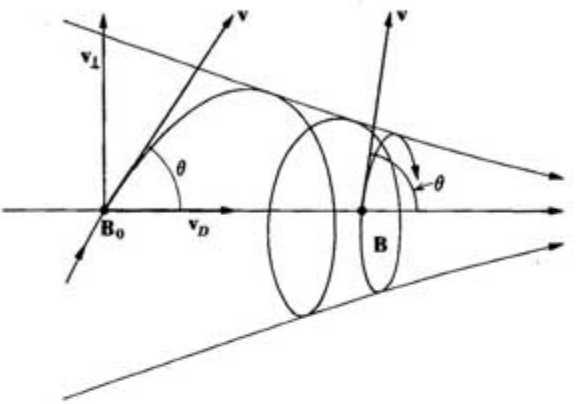


Fig. 13.8 Trayectoria helicoidal en un campo convergente indicándose cómo varía el ángulo de avance de θ_0 a θ al cambiar la intensidad del campo de B_0 a B.

respecto al eje de la hélice (véase Fig. 13.8), podemos escribir

$$\frac{v_\perp}{v} = \operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad \frac{v_\perp{}^2}{v^2} = \operatorname{sen}^2\theta \tag{13.17}$$

El valor de θ varía a medida que la partícula recorre la hélice. Si en un punto en que el campo es $\mathbf{B}_0$ el valor de θ es θ_0, y en otro punto cualquiera el campo es **B** y el ángulo θ, las Ecs. (13.13) y (13.17) nos permiten comparar los valores del ángulo con los del campo,

$$\frac{\operatorname{sen}^2\theta_0}{B_0} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{B} \qquad \text{o} \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \frac{B}{B_0}\operatorname{sen}^2\theta_0 \tag{13.18}$$

Cuando la partícula ha recorrido un tramo suficiente de hélice llega a cumplirse que $\dfrac{B}{B_0} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta_0}$, o sea $\operatorname{sen}^2\theta = 1$. Esto significa que $v_\perp = v$, de modo que todo el movimiento tiene lugar perpendicularmente al eje de la hélice y la velocidad de deriva es cero. Sin embargo, existe aún una fuerza dirigida hacia atrás, y después de detenerse la deriva se invierte. Con ello resulta que la partícula ha sido como reflejada por las líneas convergentes de **B**. Durante este proceso de reflexión como hemos dicho la energía cinética de la partícula permanece constante.

Este tipo de reflexión en un campo magnético de líneas convergentes resulta importante para explicar las recientemente descu-

biertas bandas de Van Allen, regiones con gran densidad de partículas cargadas que rodean la tierra a distancias de cuatro o cinco radios terrestres. Los datos sobre estas bandas con gran intensidad de radiación se obtuvieron en 1958 gracias a los satélites Explorador I, III y IV y los Sputnik III y Mechta.[1] Estas regiones con gran intensidad de radiación se deben a la captura por el campo magnético terrestre de protones y electrones de gran energía y origen cósmico. En la Fig. 13.9 se indican en forma esquemática estas

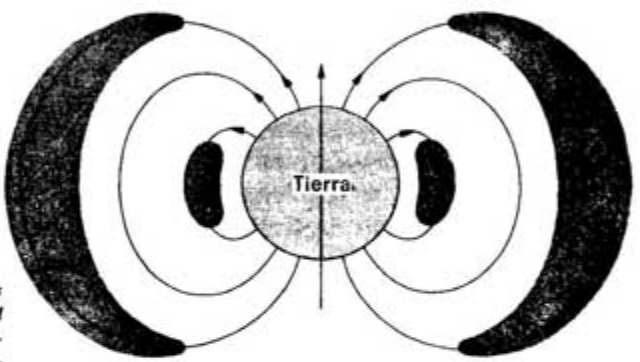


Fig. 13.9 Bandas de Van Allen formadas por las partículas cargadas que captura el campo magnético terrestre. La banda interior contiene protones y la exterior electrones.

bandas; la más interna está constituida por protones de gran energía y la más distante contiene electrones. Ambas rodean la tierra tendiendo a seguir la curvatura de las líneas del campo magnético. Esta captura de partículas resulta fácil de entender una vez analizado el efecto de espejo que hemos visto anteriormente.[2] En la Fig. 13.10 se ha indicado esquemáticamente la forma en que las líneas convergentes del campo magnético de la tierra producen reflexiones en el movimiento helicoidal de las partículas que de este modo quedan atrapadas. Como la teoría de este efecto era bien conocida, fue aplicada inmediatamente que se dispuso de los datos proporcionados por las observaciones mediante satélites.

Fermi y Alfvén propusieron explicar también, mediante el efecto de espejo, ciertas aceleraciones de las partículas de los rayos cósmicos. Fermi sugirió que en las nubes interestelares el campo debía ser mayor que en las regiones adyacentes. En tal caso, las partículas existentes en la región entre dos nubes podrían quedar atrapadas

[1] Para mayor información y más referencias sobre este trabajo puede consultarse J. A. Van Allen, The Geomagnetically Trapped Corpuscular Radiation, *J. Geophys. Research*, 64:1683-1689 (1959).

[2] Un extensivo tratamiento de este y otros problemas en magnetohidrodinámicas se da en H. Alfvén, «Cosmic Electrodynamics», Oxford University Press, Nueva York, 1950.

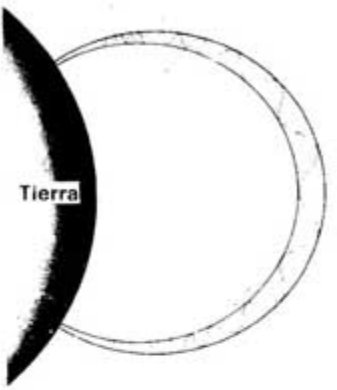


Fig. 13.10 Trayectoria helicoidal de una partícula cargada capturada por el campo magnético terrestre. La partícula recorre la trayectoria en ambos sentidos entre los dos espejos magnéticos constituidos por las líneas del campo convergentes. El esquema no se ha dibujado a escala.

en los campos convergentes como hemos visto. Si las dos nubes se están acercando, puede demostrarse que las partículas aumentan su energía cinética cada vez que son reflejadas por el espejo magnético. Este mecanismo explicaría al menos una de las causas de la existencia de partículas cargadas de energía muy elevada en los rayos cósmicos.

13.8 Ondas magnetohidrodinámicas

Vamos a pasar ahora de discutir el movimiento de partículas cargadas aisladas a considerar algunas de las características del movimiento en un campo magnético de un fluido con tan gran densidad de iones que resulta muy conductor. Consideraremos el caso de un *plasma* en el que las densidades de las partículas positivas y negativas es la misma. En presencia de un campo magnético, el movimiento de cargas (movimiento hidrodinámico) da lugar a campos eléctricos inducidos, que a su vez producen corrientes. Estas corrientes son afectadas por el campo magnético y las fuerzas resultantes cambian el estado de movimiento. Esta interrelación entre el movimiento del fluido y los campos electromagnéticos permite la aparición de ondas *magnetohidrodinámicas*.

Vamos a demostrarlo utilizando un modelo bastante aproximado. Supongamos que en el seno de un campo magnético tenemos un fluido conductor, y como primer caso, que todo el fluido está en reposo excepto una columna de fluido que se mueve con velocidad constante v en el sentido negativo del eje z (Fig. 13.11). Consideraremos que esta columna se extiende indefinidamente en la dirección del eje z. Deseamos demostrar que las fuerzas eléctricas y magnéticas que resultan del movimiento de esta columna de fluido pueden originar movimientos en otras partes del fluido, y que de hecho aparecen ondas que se propagan a través del medio.

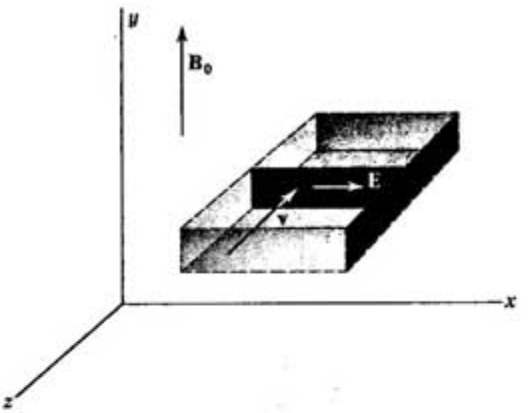


Fig. 13.11 Columna de fluido muy conductor que se mueve perpendicularmente a un campo magnético. Se ha indicado el campo eléctrico inducido E en la región en movimiento.

Hemos visto en la Sec. 8.2 que cuando un conductor se mueve con velocidad v perpendicular a un campo magnético **B**, las fuerzas magnéticas tienden a separar cargas en los lados del conductor. Estas fuerzas, cuyo valor es $F = qvB$, dan lugar a una separación de cargas hasta que se establece un campo eléctrico E, que actúa en oposición a las fuerzas magnéticas. En el equilibrio el campo eléctrico existente en el conductor viene dado por

$$E = -\frac{F}{q} = -vB$$

En forma vectorial esta relación sería

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{13.19}$$

Como resultado de este campo aparecen corrientes, tanto en el fluido conductor en movimiento como en el fluido estacionario adyacente, aproximadamente en la forma indicada en la Fig. 13.12.

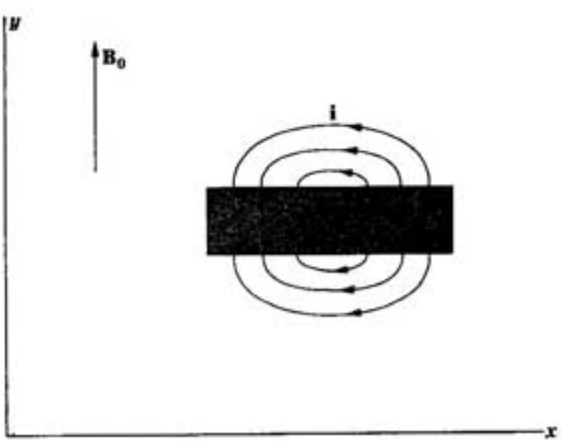


Fig. 13.12 Corrientes que resultan del campo eléctrico inducido. Las fuerzas que aparecen sobre ellas tienden a frenar el movimiento de la columna fluida y a acelerar las regiones adyacentes. Esta acción conduce a la aparición de ondas magnetohidrodinámicas.

Aunque hemos supuesto que las partículas positivas y negativas estaban presentes con igual densidad, como se mueven en sentidos opuestos dan lugar a corrientes en el mismo sentido. Esto es, aunque la carga neta es cero, ambos tipos de carga contribuyen a la corriente.

Estas corrientes interaccionan con el campo magnético, y como resultado aparecen fuerzas sobre las cargas del fluido. La fuerza sobre un elemento de corriente es

$$\mathbf{F} = i\, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{6.3}$$

Como la corriente en el interior de la columna de fluido en movimiento tiene el sentido positivo del eje x, la Ec. (6.3) conduce a una fuerza en el sentido positivo del eje z que se opone al movimiento original que habíamos supuesto en el sentido negativo de este eje. En las regiones estacionarias del fluido, por encima y por debajo de la columna en movimiento, la corriente tiene sentido opuesto de modo que la fuerza será en el sentido negativo del eje z. Así, pues, la columna originalmente en movimiento resulta frenada, en tanto que las regiones adyacentes tienden a ganar velocidad en la dirección original del movimiento. Los fenómenos descritos indican cómo este tipo de acoplamiento electromagnético explica el mecanismo por el que el movimiento se transmite a las regiones próximas. Esta acción es la responsable de las ondas magnetohidrodinámicas.

13.9 Movimiento de un fluido conductor en un campo magnético

Vamos a considerar ahora algunos aspectos de la interacción entre el movimiento del fluido conductor y un campo magnético. El movimiento del fluido perpendicular a las líneas de fuerza resulta notablemente frenado por el movimiento circular de las cargas, mientras que el movimiento en dirección paralela no es afectado. En un medio muy conductor podemos suponer de hecho que las líneas magnéticas están como «congeladas» en el fluido y son arrastradas en cualquier movimiento transversal de éste. En efecto, un campo magnético tiende a *encerrar* un plasma y a impedir que sus partículas se difundan.

Actualmente se dedican muchos esfuerzos a investigar esta situación en relación con los intentos de lograr la producción de energía por fusión nuclear controlada. El problema consiste en elevar la temperatura de un plasma hasta un valor lo bastante grande ($\sim 10^8$ °K) para que pueda tener lugar el proceso de fusión. Se espera que, por medio de un campo magnético, pueda mante-

nerse encerrado el plasma en una región separada de las paredes del recipiente, de modo que se eviten las pérdidas de calor que ocurrirían si el plasma estuviera en contacto con las paredes. La dificultad es que muchas de las posibles configuraciones del campo resultan ser inestables, y, por tanto, no son efectivas para encerrar el plasma. Falta descubrir si existe o no una solución práctica de este problema.

CATORCE

Fenómenos Eléctricos y Magnéticos de Naturaleza Cuántica

14.1 Introducción

En este capítulo vamos a apartarnos de nuestro estudio del electromagnetismo clásico para dar una breve visión del impacto que sobre la electricidad y el magnetismo ha tenido la *mecánica cuántica*. Existen casos en los que las radiaciones electromagnéticas se comportan más como *partículas* que como ondas. Históricamente, solo con grandes dificultades los físicos pudieron reconciliar la naturaleza corpuscular de la radiación con sus propiedades ondulatorias. En la actualidad, nos hemos dado cuenta de que en realidad no hay contradicción entre estos dos aspectos y que precisamente debe esperarse que diferentes tipos de experimentos pongan de relieve uno u otro aspecto. En las consideraciones que siguen daremos una descripción muy breve de algunos experimentos. Dejamos para cursos más avanzados, en los que se desarrolle la teoría cuántica, el examen más detallado del problema.

14.2 El efecto fotoeléctrico

El descubrimiento del efecto fotoeléctrico poco antes del fin del siglo pasado, proporcionó uno de los casos más evidentes en los que la teoría clásica era incapaz de dar una explicación de los fenómenos observados. Este efecto consiste en la emisión de electrones por la superficie de un metal cuando incide sobre ella una radiación electromagnética (luz). La explicación de este efecto por Einstein, en 1905, estuvo basada en la teoría de los cuantos de Planck, publicada por primera vez en 1900. Nada de cuanto había sido observado con anterioridad indicaba que podían presentarse resultados tan sorprendentes como los de estos experimentos. Sin embargo, llegó un momento que diversos tipos de experimentos señalaban en la misma dirección que el efecto fotoeléctrico.

En la fecha a que nos referimos (hacia 1900) era ya bien conocido el concepto de función trabajo. Resultaba evidente que para arrancar un electrón de un metal, debía comunicársele suficiente energía para que fuera capaz de escapar remontando la barrera de potencial que de otro modo le retiene en el metal. Existen varios procedimientos para suministrar esta energía. Un método de importancia considerable es el que consiste en calentar el metal hasta una temperatura tal que la energía cinética térmica de los electrones de conducción permita que algunos de los electrones más rápidos escapen de la superficie. Es lo que se llama *emisión termoiónica* y constituye el procedimiento más usado en la actualidad para obtener electrones en las válvulas de vacío. Otro método se denomina *emisión secundaria*, y consiste en que cuando un metal es bombardeado por átomos, iones o electrones, en ciertos casos puede ocurrir que un electrón de conducción reciba energía cinética suficiente para escapar. Finalmente, si se aplica al metal un potencial muy negativo, el campo eléctrico existente en la superficie del metal puede ser suficiente para extraer el electrón y constituye la llamada *emisión de campo*. Los campos necesarios para conseguirla son del orden de 10^6 voltios/cm en la superficie.

Podría esperarse que si incide una onda electromagnética sobre la superficie de un metal, el campo **E** oscilante pueda en ciertas condiciones llegar a suministrar energía suficiente a un electrón para que escape. Esto no es otra cosa sino el efecto fotoeléctrico, pero los detalles de un modo sorprendente resultan muy diferentes a los que pueden predecirse por una teoría clásica. Las primeras observaciones de este efecto fueron realizadas por Hertz, en 1887, que encontró que la chispa que tenía lugar en el aire entre dos electrodos muy cargados exigía menor tensión si se iluminaban los electrodos. Sin embargo, los experimentos no fueron continuados, pues en aquel tiempo los electrones no se conocían, y la teoría no estaba lo sufi-

cientemente avanzada para permitir que se llegara a conclusiones útiles de este tipo de experimentos.

El contraste entre el comportamiento real de las ondas electromagnéticas y el que podría esperarse, se revela en experimentos como el realizado posteriormente por Lenard en 1902. En la Fig. 14.1

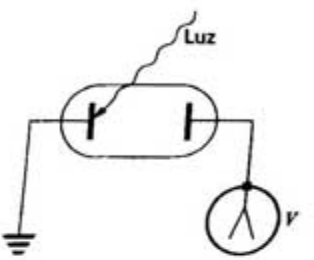


Fig. 14.1 Aparato empleado en el experimento sobre el efecto fotoeléctrico.

se indican dos electrodos encerrados en una ampolla de vidrio en la que puede hacerse el vacío. Un electrodo está unido a tierra y el otro conectado a un electroscopio que mide su potencial con respecto al primero. Cuando se ilumina éste, se comunica a alguno de los electrones energía suficiente para escapar del metal y para que le quede una cierta energía cinética $W = {}^1/_2 mv^2$. Los electrones que se dirijan hacia el otro electrodo son capaces de atravesar el espacio que media entre ambos y se acumulan sobre él. Este proceso continúa hasta que esta carga da lugar a una diferencia de potencial que impide que los electrones sigan llegando. En la Fig. 14.2 se

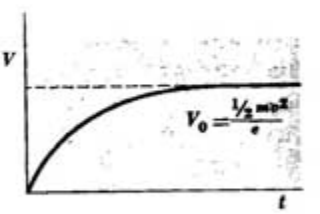


Fig. 14.2 Crecimiento de la carga hasta su valor de equilibrio en el experimento descrito.

indica gráficamente la forma en que se va alcanzando este equilibrio, que tiene lugar cuando la energía inicial de los electrones emitidos, $W = {}^1/_2 mv^2$, es precisamente igual a la energía potencial eV que deben adquirir para llegar al segundo electrodo. Por tanto, el potencial V_0 de equilibrio será

$$V_0 = \frac{1/2 mv^2}{e} \tag{14.1}$$

[En realidad, el potencial necesario para detener los electrones resulta modificado por la función trabajo de los electrodos mismos.

En efecto, si el potencial determinado con el electrómetro conectado entre las placas es V_s, la diferencia de potencial efectiva es $V_0 = V_s + (\Phi_2 - \Phi_1)/e$, siendo Φ_1 y Φ_2 las funciones trabajo de las placas emisora y colectora respectivamente, expresadas en electrón-voltios.] Desde el punto de vista clásico podemos esperar que si se aumenta la intensidad de iluminación, con lo que el vector campo eléctrico de la onda electromagnética será mayor, los electrones adquieran mayor energía inicial y V_0 aumente. De hecho, el único resultado de aumentar la iluminación es que el valor de equilibrio se alcanza más rápidamente. Esto es, se emiten más electrones por unidad de tiempo, pero su energía no resulta alterada. Aún más sorprendente que este resultado fue el descubrimiento posterior de que el único factor que produce un cambio de V_0 es la frecuencia f de la luz incidente. En la Fig. 14.3 se indica cómo varía

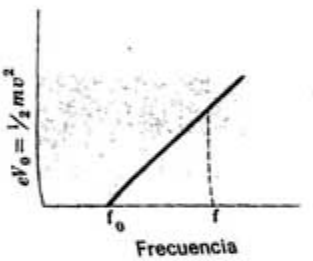


Fig. 14.3 Variación de la energía de los electrones con la frecuencia de la luz incidente en el experimento sobre el efecto fotoeléctrico.

V_0 con la frecuencia de la luz que ilumina un metal dado. El resultado es que la energía cinética comunicada a los electrones es proporcional a la diferencia entre la frecuencia y una cierta frecuencia mínima f_0.

De un metal a otro varía esta f_0 pero la pendiente de la línea resulta la misma para todos los metales. Para frecuencias inferiores a f_0 no se emite electrón alguno. Así, pues, no solo es $\frac{1}{2}mv^2 \propto (f - f_0)$, sino que la constante de proporcionalidad es independiente del metal empleado. Podemos, por tanto, escribir

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = h(f - f_0) \tag{14.2}$$

Se encontró que esta constante de proporcionalidad es el cuanto de acción de Planck ($h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ julio-seg). Si llamamos $hf_0 = W_0$, podemos escribir esta relación en la forma

$$hf = \tfrac{1}{2}mv^2 + W_0 \tag{14.3}$$

que admite la interpretación siguiente: La radiación suministra una cantidad de energía hf, de la cual una parte W_0 que depende

del tipo de metal se invierte en arrancar el electrón del metal mientras que el resto aparece como energía cinética del electrón liberado. La energía W_0 es precisamente la función trabajo del metal. Nos vemos impulsados, pues, a pensar que la energía en las ondas electromagnéticas consiste en *cuantos* discretos, cada uno con una energía

$$W = hf \tag{14.4}$$

Esta naturaleza discreta o de tipo corpuscular de la energía, nos resulta obligada si queremos entender cómo es posible que la onda electromagnética sea capaz de comunicar energía a un *solo* electrón del metal en vez de repartirla entre varios. Los experimentos indican que, o bien no se comunica la energía de la radiación a un electrón, o bien se le da la cantidad hf completa a un solo electrón. Es corriente dar a estos cuantos de radiación el nombre de *fotones*, con lo que se destacan sus propiedades corpusculares.

14.3 La radiación emitida por los átomos

Los resultados del efecto fotoeléctrico—que la energía electromagnética está formada por cuantos de valor hf—están en completo acuerdo con los fenómenos conocidos de los espectros atómicos y encaja perfectamente en el modelo atómico de niveles de energía cuantizados. Así, cuando un electrón cae desde un nivel de energía permitido de un átomo a un nivel vacío más bajo, la energía liberada aparece en forma de radiación electromagnética como un fotón que satisface la relación

$$\Delta W = hf \tag{14.5}$$

siendo ΔW la diferencia de energía entre los dos estados. La aplicación de esta idea es la que ha permitido en espectroscopia desbrozar la gran masa de datos disponible sobre las frecuencias emitidas por los átomos, y ha proporcionado la base para el modelo de átomo moderno.

14.4 Rayos X y rayos γ

Roentgen en 1895 descubrió una forma de radiación de gran energía capaz de atravesar sustancias opacas a la luz ordinaria. Estos *rayos X* se producen cuando un haz de electrones de gran velocidad incide sobre un electrodo metálico. En la Fig. 14.4 se indica es-

quemáticamente un tubo de rayos X. Entre el electrodo emisor de electrones y el ánodo se aplica una diferencia de potencial de 30 a 100 o más kilovoltios. En el tubo se ha hecho el vacío de modo que los electrones adquieren una energía muy grande antes de chocar

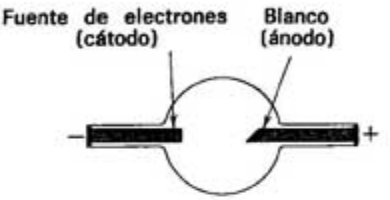


Fig. 14.4 Tubo de rayos X.

con el ánodo. Los rayos X salen a través de las paredes de vidrio del tubo y fueron reconocidos por primera vez por su capacidad para ionizar los gases y para impresionar las placas fotográficas; posteriormente se estudió su absorción por diferentes sustancias.

Uno de los mecanismos por los que pueden producirse es que un electrón de gran energía sea capaz de arrancar completamente un electrón de los niveles más internos de los átomos del metal. Cuando otro electrón vuelve a caer a este nivel vacío, la energía liberada por su brusca disminución de potencial es emitida como un cuanto de radiación electromagnética, y resultan los rayos X. Otro proceso que da lugar a rayos X es el frenado brusco de los electrones de gran velocidad por su choque con el metal. Esta deceleración brusca conduce a una transferencia directa de energía cinética del electrón en energía electromagnética en forma de rayos X.

Von Laue, en 1913, razonó que si los rayos X fueran ondas electromagnéticas, debían presentar los efectos de interferencias típicos de las ondas, como tienen lugar en la difracción de la luz en una red de difracción. Con esta idea hizo pasar un haz de rayos X a través de un cristal de sal, en el que las distancias entre los átomos distribuidos periódicamente le hacen comportarse como una red de difracción. Obtuvo sobre una placa fotográfica situada más allá del cristal, una figura de difracción que no solo presentaba el aspecto esperado debido a las interferencias de las ondas, sino que hizo posible, además, medir la longitud de onda de los rayos X. El dato necesario de las distancias interatómicas lo obtuvo a partir de la densidad del cristal y el número de Avogadro. Mientras que la longitud de onda de la luz visible está comprendida entre 4.000 y 7.000 A (un angstrom es igual a 10^{-10} metros) aproximadamente, la longitud de onda de los rayos X corresponde al intervalo entre 0,01 A y 100 A. Mediante la relación $\lambda f = c$, siendo λ la longitud de onda, f la frecuencia y c la velocidad de propagación de las on-

das, calculó que para los rayos X las frecuencias eran aproximadamente entre 10^{20} y 10^{16} ciclos/seg.

El estudio de las figuras de difracción de monocristales no solo ha proporcionado un valioso método para medir las longitudes de onda de los rayos X, sino que proporciona datos muy detallados sobre las distancias y disposición de los átomos en los sólidos.

Otro proceso que da lugar a emisión de fotones de alta energía tiene lugar en los núcleos atómicos. Los núcleos inestables liberan su energía en exceso mediante la emisión de rayos γ. Estos rayos son como los X salvo en que son el resultado de fenómenos nucleares y frecuentemente son de mayor energía aún.

14.5 Efecto Compton

Existe un caso de interacción entre los rayos X y la materia, en el que se exhibe con gran claridad la naturaleza corpuscular de la radiación electromagnética. Esta interacción fue observada por primera vez por A. H. Compton en 1923. Cuando los rayos X inciden sobre una lámina delgada metálica, puede ocurrir que parte de la energía de los rayos X sea comunicada a un electrón que es expulsado del metal. En este proceso no es transmitida toda la energía al electrón y como consecuencia el rayo X que atraviesa tiene menos energía que el original (y, por tanto, menor frecuencia). El aspecto más interesante de este efecto es que si describimos el rayo X como una partícula, de energía hf e ímpetu $p = hf/c$, puede interpretarse perfectamente este fenómeno como el choque elástico de un fotón y un electrón. Esto es, se conservan tanto la energía como el ímpetu, y, si se conocen la dirección y la energía con que son emitidos los electrones, puede calcularse la dirección y la frecuencia de los rayos X que se obtienen. La energía relativamente pequeña que es necesaria para arrancar el electrón del metal es insignificante comparada con la energía mucho mayor del rayo X incidente, y en el balance de energías anteriormente indicado puede despreciarse.

14.6 Ondas electrónicas

Los conocimientos actuales sobre la estructura atómica indican que en los átomos y en los sólidos resulta ventajoso atribuir propiedades ondulatorias a las partículas. Los experimentos de Davisson y Germer y de G. P. Thomson en 1927 lo han demostrado para los electrones de un modo muy revelador. En estos experimentos, incide sobre una sustancia en forma de lámina delgada

un haz de electrones, y se encuentra que el conjunto de los electrones que salen de la lámina presenta una figura de difracción típica de las ondas, exactamente igual a las figuras de difracción producidas por los rayos X. Otro caso en el que se ponen de manifiesto las propiedades ondulatorias de los electrones es en el *microscopio electrónico*. Como los electrones pueden ser desviados por los campos eléctricos y magnéticos, es posible enfocar un haz de electrones, por medio de campos eléctricos y bobinas magnéticas de forma apropiada, en forma muy semejante a como las lentes enfocan la luz. Estas lentes eléctricas y magnéticas se emplean en el microscopio electrónico para obtener imágenes muy aumentadas de láminas delgadas a través de las cuales pasa un haz de electrones de gran energía. El hecho de que la longitud de onda de los electrones de energía suficientemente elevada es menor que la longitud de onda de la luz visible conduce a mayor poder separador. También, las propiedades ondulatorias de los electrones permiten deducir de las figuras de difracción observadas consecuencias sobre la estructura interna de la materia. De este modo se han estudiado varios tipos de imperfecciones en láminas delgadas de metales. En el microscopio electrónico pueden observarse partículas tan pequeñas como los virus que con luz ordinaria no pueden resolverse, por ser demasiado pequeñas.

14.7 Cuantización magnética. El experimento de Stern-Gerlach

Durante el periodo de desarrollo de la teoría cuántica hubo tantas sorpresas para los físicos, que no han sido igualadas anterior o posteriormente. Nos hemos referido brevemente a algunas de ellas y vamos a describir ahora otra relacionada con el magnetismo atómico. En otro lugar ya hemos descrito los orígenes del magnetismo en los átomos, el movimiento orbital de los electrones, el spin electrónico y el magnetismo nuclear. Los experimentos de Stern y Gerlach fueron realizados en 1921 para medir los momentos magnéticos de átomos individuales. Con anterioridad, las medidas magnéticas se habían limitado a la determinación de la susceptibilidad de muestras macroscópicas. El principio del experimento consiste en medir la desviación de un haz de átomos neutros producida al atravesar el haz un campo magnético no-homogéneo. En la Fig. 14.5 se indica esquemáticamente el dispositivo experimental.

Este experimento puede emplearse para medir los momentos magnéticos de los átomos. Desde una fuente de átomos existente en uno de los extremos del aparato se produce un haz atómico bien colimado que se hace pasar, en una cámara en que se ha hecho el vacío, por un campo magnético divergente, obtenido mediante un

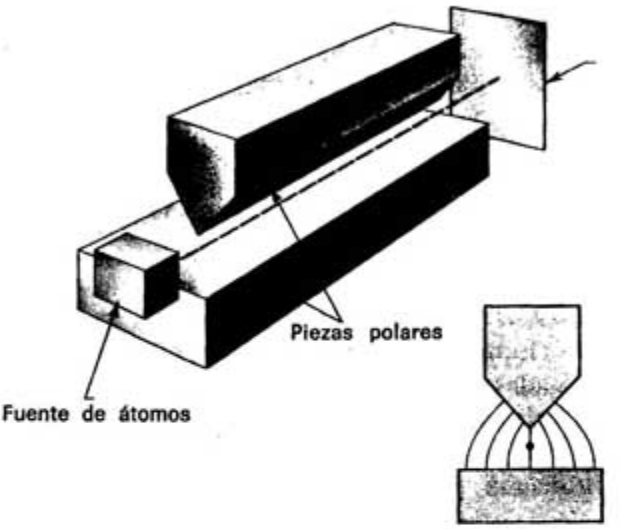


Fig. 14.5 Aparato para medir los momentos atómicos.

electroimán con piezas polares de forma apropiada. Después de atravesar esta región el haz incide sobre una pantalla fluorescente o placa fotográfica, con lo que se registra su posición. En un campo magnético no-uniforme existe una fuerza neta sobre un dipolo magnético. Para describir este fenómeno resulta conveniente utilizar el modelo polar de un dipolo magnético (equivalente al caso de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico divergente). En la Fig. 14.6

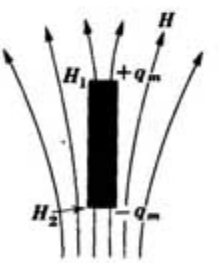


Fig. 14.6 Fuerza sobre un dipolo magnético situado en un campo divergente.

se indica este dipolo, y se ha empleado el símbolo q_m para designar la intensidad de polo equivalente (tal como se definía en la Sec. 9.13) y l para la distancia entre polos. Si los componentes verticales del campo en los puntos ocupados por los dos polos son respectivamente H_1 y H_2, las fuerzas sobre cada uno de los polos serán $\mu_0 q_m H_1$ y $-\mu_0 q_m H_2$, con lo que la fuerza neta será $\mu_0 q_m (H_1 - H_2)$, dirigida en este caso hacia abajo. Con el dipolo orientado en el sentido opuesto, la fuerza sería hacia arriba. Para otras orientaciones la fuerza sería menor, puesto que sería más pequeña la diferencia entre los valores de H_1 y H_2 si el dipolo no está alineado en la direc-

ción del gradiente máximo del campo. El efecto de este campo divergente puede esperarse que sea un alargamiento de la mancha que aparece sobre la pantalla al incidir el haz en ausencia de campo magnético. Algunos átomos serían desviados hacia arriba, y otros hacia abajo, en mayor o menor extensión según su orientación en el espacio mientras atraviesan el campo magnético. En la Fig. 14.7 se

Fig. 14.7 Figuras correspondientes al experimento descrito: (a) Mancha sobre la pantalla en ausencia de campo magnético; (b) alargamiento que podría esperarse desde un punto de vista clásico al atravesar el haz un campo magnético divergente; (c) resultado experimental obtenido al atravesar el haz un campo magnético divergente.

indican las figuras sobre la pantalla, la primera obtenida sin campo, la segunda la que podría esperarse al aplicar el campo y la tercera la obtenida en realidad, por ejemplo, con átomos de litio. En lugar de adoptar todas las orientaciones posibles, solo se presentan dos, una paralela al campo y la otra antiparalela.

Este resultado es otro de los fenómenos explicados por la teoría cuántica. Resulta de la cuantización de las posibles orientaciones de un dipolo magnético en un campo magnético. Otra forma de expresar esta misma situación es decir que los niveles de energía permitidos para el dipolo en un campo magnético están cuantizados. Como el girar un dipolo desde la posición en que está alineado con el campo a la posición antiparalela exige emplear trabajo, su orientación puede expresarse en función de una energía, y esta energía es la que está cuantificada. En el ejemplo indicado, solo son posibles dos orientaciones, aunque en otros casos pueden existir más. Esta misma técnica fue aplicada por Stern y Rabi a los núcleos atómicos, y en la actualidad se emplea mucho para determinar exactamente los momentos magnéticos nucleares.

El comportamiento mecano-cuántico de los dipolos magnéticos de electrones y núcleos, constituye un activo campo de investigación en física del estado sólido en el momento presente. Las muestras se colocan en un campo magnético y se someten a una radiación de alta frecuencia o microondas. Esta radiación induce transiciones de los dipolos magnéticos de unos estados a otros, y como consecuencia hay una transferencia de energía entre el campo de radiación y la muestra. Los resultados de estos experimentos, llamados de *resonancia magnética*, suministran datos importantes acerca de los dipolos mismos y de la sustancia en la que están incluidos.

QUINCE

Unidades de Medida

15.1 Introducción

En este libro empleamos el sistema de unidades metro-kilogramo-segundo (mks), que es bastante conocido y presenta ciertos aspectos ventajosos. Sin embargo, como mucha de la bibliografía importante en física y en ingeniería ha sido escrita empleando las unidades del sistema *cgs electrostático* y *electromagnético*, es esencial para el estudiante tener algún conocimiento de estos sistemas. Además, aún en la actualidad se escriben muchas obras en estos sistemas, por lo que continuará existiendo la necesidad de conocer ambos.

Las ventajas del sistema mks, que hemos empleado, más importantes son las siguientes:

1. En todos los fenómenos, sean puramente eléctricos, puramente magnéticos o una combinación de ambos, se emplean las mismas unidades. En contraste con este hecho, en el sistema cgs ha sido necesario desarrollar dos subsistemas, lo que exige en algunas ocasiones realizar la conversión del uno al otro.

2. En la mayoría de los casos las unidades empleadas en el sistema mks son idénticas a las unidades *prácticas* de electricidad y

magnetismo, por ejemplo, amperio, voltio, ohmio y faradio, que durante mucho tiempo vienen siendo las unidades más empleadas en las medidas prácticas tanto de física como de ingeniería. Con frecuencia, en el sistema cgs las cantidades medidas en unidades absolutas según las ecuaciones básicas se convierten posteriormente a unidades prácticas.

3. Hemos empleado el sistema mks *racionalizado*, en el que aparece un factor 4π en las ecuaciones fundamentales. Su presencia en ellas da lugar a una forma algo más simple para muchas de las ecuaciones derivadas de uso frecuente.

4. El sistema mks emplea metros y newtons en lugar de centímetros y dinas como en el sistema cgs.

En este capítulo vamos a examinar el sistema cgs en contraste con el mks, indicando cómo puede hacerse la conversión del uno al otro.

15.2 El sistema electrostático absoluto de unidades (cgs e. e.)

La ecuación básica de la fuerza se escribe

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{15.1}$$

y se emplea en el sistema cgs e. e. para definir la unidad absoluta de carga. Cuando dos cargas iguales q_1 y q_2 se encuentran en el vacío, a una distancia de 1 cm y la fuerza entre ellas es 1 dina, las cargas son cada una de 1 unidad electrostática. Uno de los nombres propuestos para esta unidad es el de *statculombio*.

En el sistema mks, la ecuación se escribe

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{1.5}$$

y el factor $1/4\pi\epsilon_0 = k$ se toma igual a 9×10^9 newton-m^2/culombio^2. Este factor hace que la unidad de carga empleada en electrostática, el culombio, concuerde con la unidad de carga obtenida a partir de la fuerza magnética entre dos elementos de corriente. El culombio determina en estos experimentos sobre fuerzas magnéticas definiendo la unidad de corriente como un culombio por segundo, que se llama ampere.

Comparemos la unidad e. e. o statculombio, con el culombio. Se evita toda confusión razonando sobre dos cargas iguales separadas por una cierta distancia y después empleando las dos ecua-

ciones para calcular la cantidad de carga. En efecto, en el sistema mks escribiríamos

$$q^2 \text{ (culombios}^2) = \frac{F \text{ (newtonios) } r^2 \text{ (metros}^2)}{k} \tag{15.2}$$

y en el sistema e. e. cgs

$$q^2 \text{ (unidades e. e.}^2) = F \text{ (dinas) } r^2 \text{ (cm}^2) \tag{15.3}$$

Con el fin de comparar estas dos afirmaciones en las mismas condiciones físicas, vamos a buscar los cambios que sería necesario introducir en la Ec. (15.2) si midiéramos F en dinas y r en centímetros. Como 1 newton es igual a 10^5 dinas, el valor numérico de F medido en dinas debe ser dividido por 10^5 para obtener el valor correcto en el sistema mks. Igualmente, r^2 medido en centímetros cuadrados, debe ser dividido por 10^4 para dar el valor correcto. Así, pues, podemos volver a escribir la Ec. (15.2) en la forma

$$q^2 \text{ (culombios}^2) = \frac{F \text{ (dinas) } r^2 \text{ (cm}^2)}{10^5 \times 10^4 \times 9 \times 10^9} \tag{15.4}$$

Sustituyendo la Ec. (15.3) en ésta y tomando la raíz cuadrada, obtenemos

$$q \text{ (culombios)} \times 3 \times 10^9 = q \text{ (unidades e. e.)} \tag{15.5}$$

Esto significa que una unidad electrostática de carga es muy pequeña comparada con el culombio; en efecto, una carga dada resulta medida por un número mucho mayor en unidades e. e. que en culombios. Esto mismo puede expresarse en otra forma equivalente:

$$1 \text{ culombio} = 3 \times 10^9 \text{ unidades e. e.} \tag{15.6}$$

La Ec. (15.5) nos dice cómo convertir una cantidad dada en culombios a otro número que la exprese en unidades e. e., mientras que la Ec. (15.6) da la relación entre los dos tipos de unidades.

Otras magnitudes derivadas de la ley fundamental de Coulomb tienen unidades que se deducen en forma lógica de ella. Necesitamos únicamente remplazar ϵ_0 por $1/4\pi$ en aquellas ecuaciones mks en que ϵ_0 aparezca (de este modo $1/4\pi\epsilon_0$ se hace la unidad) y medir longitudes y fuerzas, en cm y dinas respectivamente, para obtener la expresión equivalente en el sistema cgs e. e. Así, por ejemplo, el campo eléctrico se medirá en dinas por statculombio y las diferencias de potencial en ergios por statculombio. La unidad de campo eléctrico también puede llamarse statvoltio por centímetro. La razón entre unidades para estas magnitudes derivadas, entre los sistemas mks y cgs e. e., se obtienen en la forma antes indicada. Vamos

a desarrollar algunos ejemplos, pero en otros casos solo daremos el resultado.

El campo eléctrico está dado en ambos sistemas por

$$E = \frac{F}{q} \tag{15.7}$$

En el sistema mks la unidad es el newton/culombio, y en el cgs e.e. la unidad es la dina/statculombio. Un campo eléctrico dado en el sistema mks se podrá escribir

$$E_{\text{mks}} = \frac{F\,(\text{newtonios})}{q\,(\text{culombios})} = \frac{F\,(\text{dinas})/10^5}{q\,(\text{estatoculombios})/3 \times 10^9}$$

$$= E_{\text{esu}} \times 3 \times 10^4 \tag{15.8}$$

El número que expresa este campo es menor en el sistema mks, por tanto, la unidad e. e. es 3×10^4 veces mayor que la mks.

Para el potencial podemos escribir

$$V_{\text{mks}}\,(\text{voltios}) = \frac{\text{trabajo (julios = newtonio-m)}}{\text{carga (culombio)}}$$

$$\frac{\text{dina-cm}/10^7}{\text{estatoculombio}/3 \times 10^9} = 300 V_{\text{esu}} \tag{15.9}$$

La unidad electrostática de potencial se llama statvoltio. Es 300 veces mayor que el voltio.

Otra forma de obtener este resultado es emplear la ecuación

$$V_{\text{mks}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \Sigma \frac{q\,(\text{culombios})}{r\,(\text{metros})}$$

que se convierte en

$$V_{\text{esu}} = \Sigma \frac{q\,(\text{estatoculombios})}{r\,(\text{cm})}$$

para el sistema cgs e. e. El empleo de estas ecuaciones conduce a la misma relación, entre las unidades de ambos sistemas, antes obtenida.

Análogamente, como se indica en el Ejemplo 3.5*d*, la diferencia de potencial entre dos puntos del campo debido a una línea recta cargada

$$V_{AB}(\text{voltios}) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_A}{r_B}$$

se convierte en

$$V_{AB}\,(\text{estatovoltios}) = 2\sigma \ln \frac{r_A}{r_B}$$

Para la capacidad encontramos, empleando $C = Q/V$, que la unidad electrostática de capacidad es el centímetro. Con frecuencia esta unidad suele llamarse también *statfaradio*. La relación entre unidades es

$$1 \text{ faradio} = 10^{11} \text{ cm} \tag{15.10}$$

Las ecuaciones en las que aparece ϵ_0 son diferentes en ambos sistemas. Por ejemplo, la capacidad de un condensador plano es en el sistema mks

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad \text{faradios}$$

y en el sistema cgs e. e.

$$C = \frac{A}{4\pi d}$$

En presencia de materia, en estas ecuaciones de capacidades en el sistema mks ϵ_0 queda remplazado por ϵ, siendo $\epsilon = K\epsilon_0$, y K la constante dieléctrica relativa. Para el sistema cgs e. e. pondremos $K\epsilon_0$ y sustituiremos como es usual ϵ_0 por $1/4\pi$. K tiene el mismo valor en ambos sistemas.

En la Tabla 15.1 se dan otras diferencias y semejanzas.

Tabla 15.1

	mks *	*cgs e. e.* *
Teorema de Gauss: sin diferencias, salvo los factores 4π y ϵ_0	$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\Sigma q$	$\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi\Sigma q$
Relaciones entre los campos: definiciones ligeramente distintas conducen a algunas modificaciones†	$\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ $P = \epsilon_0\chi E$ $D = \epsilon E$ $\epsilon = \epsilon_0 K$ $K = 1 + \chi$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ $P = \chi E$ $D = KE$ $K = 1 + 4\pi\chi$
Energía almacenada en el campo eléctrico (volumen unidad)	$\frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ **julios**	$\frac{E^2}{8\pi}$ **ergios**

* En cada caso E debe medirse en la unidad apropiada.

† La ausencia de ϵ_0 en las ecuaciones e. e. elimina en empleo de la permitividad ϵ, quedando únicamente la constante K. Como esta constante da la relación de capacidades de un condensador con y sin dieléctrico entre sus placas, es la misma en todos los sistemas. Como consecuencia la susceptibilidad por unidad de volumen (metro cúbico) de un dieléctrico en el sistema mks es precisamente 4π veces el valor de la susceptibilidad por unidad de volumen (centímetro cúbico) en el e. e.

15.3 El sistema electromagnético absoluto de unidades (cgs e. m.)

La ecuación fundamental en este sistema se refiere a los efectos magnéticos entre corrientes. Para definir la unidad de intensidad de corriente en ambos sistemas emplearemos la ecuación que da la fuerza entre dos elementos de corriente paralelos. Para este caso la Ec. (6.6), escrita en el sistema mks, se escribirá

$$dF = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i_1\, dl_1 i_2\, dl_2}{r_{12}^2} \tag{15.11}$$

siendo $\mu_0/4\pi = 10^{-7}$ henry/m. Esta ecuación se modifica en el sistema cgs e. m. sustituyendo esta constante por 1 y haciendo los cambios normales de newtons y metros a dinas y centímetros. La unidad de intensidad en el sistema mks (ampere) corresponde al caso que tomen el valor uno todas las magnitudes que aparecen en la Ec. (15.11). Si despejamos i resulta

$$i^2\ (\text{amperio}^2) = \frac{4\pi}{\mu_0} F\ (\text{newtonios})$$

En el cgs e. m. tenemos

$$i^2\ (\text{unidades e. m.}^2) = F\ (\text{dinas})$$

Y haciendo la comparación usual

$$i^2\ (\text{amperio}^2) = 10^7\, F\,(\text{dinas})/10^5 = 10^2 i^2\ (\text{unidades e. m.}^2)$$

o sea

$$10 \text{ amperios} = 1 \text{ unidad e. m. o abamperio} \tag{15.12}$$

Es decir, el abampere es 10 veces mayor que el ampere. Se suele identificar las unidades e. m. por el prefijo *ab-* del mismo modo que las unidades e. e. tienen el prefijo *stat-*. Entre el culombio y el abculombio existe esta misma razón, puesto que ambos están ligados a la intensidad por la misma unidad de tiempo (el segundo).

La ecuación para el campo magnético de inducción se obtiene a partir de la ecuación fundamental

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(i\, d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}})}{r^2} \tag{6.2}$$

tomando en el sistema e. m. la constante igual a 1. La unidad de campo en el sistema mks resulta ser el weber por metro cuadrado.

La unidad e. m. de campo es el gauss. Comparando resulta

$$1 \text{ weberio/m}^2 = 10^4 \text{ gaussio} \tag{15.13}$$

En la Tabla 15.2 incluimos algunas comparaciones entre ecuaciones mks y cgs e. m.

Tabla 15.2

mks	*cgs e. m.* *
$B = \mu_0(H + M)$	$B = H + 4\pi M$
$\mu = \mu_0(1 + \chi)$	$\mu = 1 + 4\pi\chi$
$B = \mu H$	$B = \mu H$

* En unidades e. m., $\mu_{vac} = 1$ y $B_{vac} = H_{vac}$.

15.4 Combinación de las unidades cgs e. e. y e. m.

Existen muchos casos en los que aparecen tanto medidas electrostáticas como magnéticas. Un caso importante es el movimiento de una partícula cargada en campos eléctricos y magnéticos. El procedimiento más corriente en estos casos es convertir todas las magnitudes al sistema apropiado. Como primera etapa obtendremos la relación entre el statculombio y el abculombio. Ya hemos demostrado que

$$3 \times 10^9 \text{ estatoculombios} = 1 \text{ culombio}$$

y que

$$1 \text{ abculombio} = 10 \text{ culombios}$$

Podemos, pues, escribir directamente

$$3 \times 10^{10} \text{ estatoculombios} = 1 \text{ abculombio} \tag{15.14}$$

En todas las relaciones que hemos encontrado, cuando aparece el factor 3×10^{10}, se trata en realidad de la velocidad de la luz c, y su valor correcto es $(2{,}997930 \pm 0{,}000003) \times 10^{10}$ cm/seg. Hemos empleado el valor aproximado, pero puede hacerse fácilmente la corrección si es necesario.

En el sistema mks, la fuerza en newtons sobre una carga que se mueve en un campo combinado E y B, viene dada por

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{15.15}$$

empleando unidades mks para todas las magnitudes. Esta ecuación es correcta en el sistema cgs cuando se emplean unidades e. e. para la primera e y unidades e. m. para la segunda e, al mismo tiempo que se pone E en unidades e. e. y B en unidades e. m.

15.5 Tabla de conversión

Para convertir un número que exprese el valor calculado o medido de una magnitud en unidades prácticas (o mks) a unidades cgs e. e. (o e. m.) debe multiplicarse por el factor correspondiente que aparece en la columna apropiada de la Tabla 15.3.

Tabla 15.3

Magnitud	*Unidad mks (o práctica)*	*Factor* cgs e. e.	*Factor* cgs e. m.
Carga	**Culombio**	3×10^9	10^{-1}
Intensidad de corriente	**Amperio**	3×10^9	10^{-1}
Potencial	**Voltio**	**1/300**	10^8
Potencia	**Vatio**	10^7	10^7
Resistencia	**Ohmio**	$1/(9 \times 10^{11})$	10^9
Autoinducción	**Henrio**	$1/(9 \times 10^{11})$	10^9
Capacidad	**Faradio**	9×10^{11}	10^{-9}

Así, pues, si el valor medido e 1 voltio, esto resulta 1/300 de la unidad e. e. de potencial (1/300 statvoltio) o bien 10^8 unidades e. m. (abvoltios). Análogamente, si la cantidad medida fuera, por ejemplo, 20 statvoltios correspondería a 6.000 voltios.

Los sistemas mks y cgs son los más importantes entre los sistemas de unidades, pero debe señalarse que en la bibliografía aparecen otros que presentan ciertas variantes. El sistema mks que hemos empleado es el llamado sistema mks racionalizado. El sistema mks no-racionalizado se obtiene a partir de aquél haciendo las siguientes sustituciones:

$4\pi\epsilon_0$ se remplaza por ϵ_0
$4\pi\epsilon$ se remplaza por ϵ
$\mu_0/4\pi$ se remplaza por μ_0
$\mu/4\pi$ se remplaza por μ

D se remplaza por $D/4\pi$
H se remplaza por $H/4\pi$

Además, las definiciones de algunas de las magnitudes derivadas, como χ, D y P, M y H pueden diferir en los factores μ_0 o ϵ_0 de los empleados en este libro.

APENDICE A

Ecuaciones de Poisson y Laplace

En el caso más general, en que el campo eléctrico en una región del espacio puede ser debido tanto a la existencia de cargas distantes como a una distribución de carga en la región misma, el teorema de Gauss establece ciertas limitaciones a la forma de variar el potencial al pasar de un punto a otro. Vamos a deducir aquí la expresión de estas condiciones y dar un ejemplo de su aplicación a un problema particular. Supongamos que la densidad de carga en todos los puntos de la región considerada es una función ρ (culombios/m^3), que toma un valor determinado para cada uno de los valores de x, y, z, en un sistema rectangular de coordenadas. Vamos a aplicar el teorema de Gauss a un elemento de volumen y deducir de este modo la expresión diferencial de las condiciones que debe cumplir V.

En la Fig. A.1 se ha dibujado un elemento de volumen $dx\,dy\,dz$, cuyo centro se encuentra en $x = a$, $y = b$ y $z = c$. Al aplicar el teorema de Gauss tenemos

$$\int_{SC} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,dx\,dy\,dz$$

Para calcular la integral de Gauss $\int_{SC} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ en la superficie del volumen $dx\,dy\,dz$, podemos tomar la suma de productos de las componentes normales de E por el área de las seis caras del cubo. Esto es, calcularemos el flujo de E a través de cada una de las caras. Examinemos primero las dos caras paralelas al plano yz. Las abscisas x de estas dos caras serán $x_1 = a - {}^1/_2 dx$ y $x_2 = a + {}^1/_2 dx$. La componente x de E será $E_x = -\partial V/\partial x$. Podemos ya escribir la contribución a la integral del flujo que atraviesa estas dos caras: la

cara de la izquierda contribuye con $dy\,dz\,(\partial V/\partial x)_{a-1/2dx}$ y la de la derecha contribuye con $-dy\,dx\,(\partial V/\partial x)_{a+1/2dx}$. Los subíndices indican en este caso que $\partial V/\partial x$ ha de ser calculado en cada una de las caras. La suma de estos dos términos es el flujo *neto* a través de las dos caras que consideramos, y puede escribirse en la forma

$$-\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{a+\frac{1}{2}dx}-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{a-\frac{1}{2}dx}\right]dy\,dz=-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}dx\,dy\,dz$$

Esta relación resulta del hecho de que la diferencia entre los valores de $\partial V/\partial x$ en las dos caras es precisamente la derivada de $\partial V/\partial x$

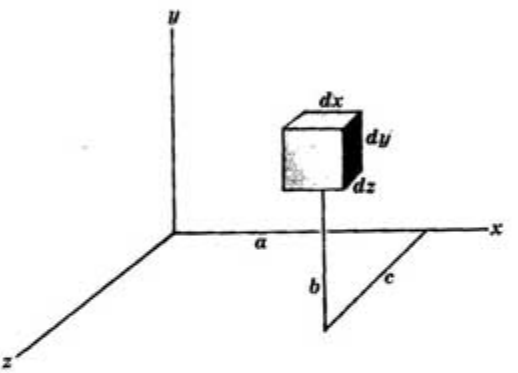


Fig. A.1 Volumen elemental empleado para obtener las ecuaciones de Poisson y Laplace a partir del teorema de Gauss.

según el eje x por la separación dx entre ambas caras [esto es, $(\partial^2 V/\partial x^2)dx$].

Razonando en forma análoga con los restantes pares de caras del cubo, resulta finalmente

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz=-\frac{\rho}{\epsilon_0}dx\,dy\,dz$$

y como esta relación debe cumplirse para cualquier volumen elemental $dx\,dy\,dz$, se deduce que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{A.1}$$

La ley de variación con el cuadrado de la distancia impone esta limitación a las segundas derivadas del potencial con respecto a x, y, z. La notación vectorial para esta expresión es $\nabla^2 V$, llamada *laplaciana de V*. Cualquier campo electrostático debe satisfacer esta relación, que escrita en notación vectorial es

$$\nabla^2 V=-\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{A.2}$$

Puede profundizarse en el significado de esta expresión analizando el caso importante de una región en la que no existan cargas. Entonces esta ecuación, llamada de Poisson, se convierte en la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 V = 0 \tag{A.3}$$

Supongamos que la configuración del campo es de un tipo tal que el flujo de E a través del volumen considerado es cero salvo en lo que respecta a las caras $dz\,dy$. La ecuación entonces nos dice que el valor de E es el mismo en las dos caras o que el flujo neto a que atraviesa el volumen es cero. Pero esto es precisamente lo que ya sabemos por el teorema de Gauss, o a partir de las ideas sobre que las líneas de fuerza son continuas y se originan y terminan únicamente sobre las cargas. El campo que acabamos de describir es precisamente un campo uniforme dirigido según el eje x.

APENDICE B

Esfera Conductora en un Campo Uniforme

Como ejemplo del problema general de condiciones en los límites en electrostática, vamos a considerar ahora el caso de una esfera conductora descargada situada en un campo que en su ausencia sería uniforme.

Una forma útil de plantear el problema es buscar una solución que posea las siguientes propiedades: (1) Obedecer a la ecuación de Poisson o de Laplace, según hayan o no cargas en el espacio considerado. Nos limitaremos al caso de conductores en el vacío, de modo que $\nabla^2 V = 0$ (véase Apéndice A). (2) Dar las superficies equipotenciales exigidas por el problema. (3) Comportarse de forma apropiada en el infinito.

De acuerdo con el teorema de unicidad,[1] que vamos a dar sin demostración, podemos asegurar que cualquier solución que cumpla todas estas condiciones es la única solución posible. Como se indica en la Fig. B.1, llamaremos a al radio de la esfera y supondremos que la carga neta sobre la esfera es cero, además llamaremos E_0 al campo en puntos muy alejados de la esfera (éste sería también el valor del campo en ausencia de la esfera). Existe un plano equipotencial perpendicular a la dirección del campo y que corta a la esfera pasando por su centro. Por definición tomaremos este plano a potencial cero. El problema consiste ahora en buscar una expresión para el potencial tal que $\nabla^2 V = 0$, la esfera sea una superficie equipotencial, y en puntos muy alejados el potencial sea el mismo que en la ausencia de los efectos perturbadores de la esfera, esto es, un potencial compatible con un campo uniforme. Em-

[1] Puede encontrarse la demostración del teorema de unicidad para los campos eléctricos y magnéticos estáticos, por ejemplo, en W. V. Houston, «Principles of Mathematical Physics», 2.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., 1948, págs. 271-273.

pleando coordenadas cilíndricas por conveniencia, en puntos muy alejados de la esfera, $V = -E_0 x$, o sea $V = -E_0 r \cos\theta$. Por tanto, cualquiera que sea nuestra expresión final de V debe reducirse a ésta para valores grandes de r. Otra consideración es que la superficie de la esfera debe estar a un potencial constante de cero. Entonces si añadimos otro término debe contener también el cos θ para que, en todos los puntos de la superficie esférica, la suma de ambos términos pueda ser cero. Por otra parte, este segundo término debe tender a cero al crecer r. Se puede intentar una expresión que contenga cos θ/r^2. Probaremos con $V = -E_0 r \cos\theta + (A/r^2)\cos\theta$, siendo A una constante a determinar. Ambos términos son *funciones*

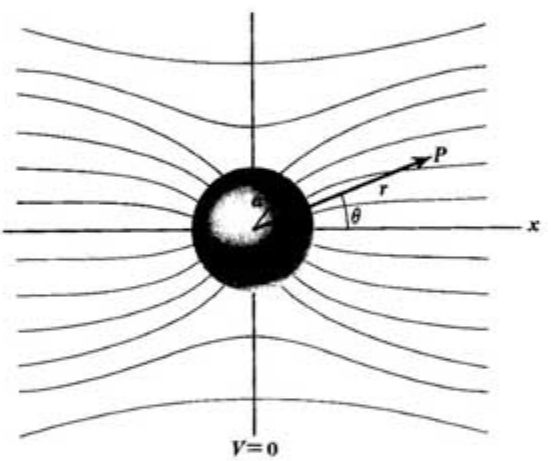


Fig. B.1 Esfera conductora en un campo externo uniforme.

armónicas, que son siempre soluciones de la ecuación $\nabla^2 V = 0$. Cuando hacemos $V = 0$ para $r = a$, para satisfacer la condición exigida en la superficie de la esfera, resulta $A = E_0 a^3$, de modo que la expresión resulta ser $V = -E_0 r \cos\theta + (E_0 a^3/r^2)\cos\theta$. Esta expresión es válida para todo valor de $r > a$. También podría satisfacerse la condición sobre la superficie, si el segundo término del potencial fuera $(E_0 a^2/r)\cos\theta$. Sin embargo, esta última función no es solución de la ecuación de Laplace y, por tanto, debe descartarse. La discusión y desarrollo de las formas posibles de las soluciones de la ecuación de Laplace se encuentran en libros más avanzados sobre este tema. Como la expresión aquí hallada cumple las condiciones en los límites $r = a$ y $r = \infty$ y satisface la ecuación de Laplace, debe ser la solución del problema.

El segundo término, $(E_0 a^3/r^2)\cos\theta$, representa la perturbación del campo uniforme original que produce la esfera conductora. Equivale al efecto de un dipolo de momento dipolar $p = E_0 a^3$

situado en el punto ocupado por el centro de la esfera, y en la dirección del eje x.

El campo en la superficie de la esfera puede obtenerse derivando la expresión de V. Como el campo es siempre normal a la superficie de un conductor, en el caso de la esfera el campo próximo está dirigido según r. Por tanto,

$$E = -\frac{\partial V}{\partial r} = E_0 \cos\theta + \left(\frac{2E_0 a^3}{r^3}\right)_{r=a} \cos\theta = 3E_0 \cos\theta$$

El campo junto a la superficie y en el eje x vale $3E_0$. En los puntos de la esfera en que $\theta = 90°$, tanto V como E son cero.

APENDICE C

Esfera dieléctrica en un Campo Uniforme

Vamos a discutir aquí, en parte sin demostración, cómo perturba un cuerpo dieléctrico a un campo uniforme al introducirlo en él. Comenzaremos por estudiar una esfera dieléctrica situada en un campo originalmente uniforme $\mathbf{E}_0$ tal como se indica en la Fig. C.1.

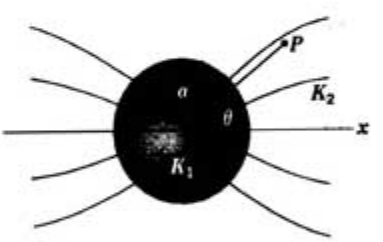


Fig. C.1 Esfera dieléctrica introducida en un campo eléctrico uniforme. Se han dibujado las líneas de **D**.

Este problema está relacionado con el de un conductor esférico situado en un campo uniforme que se discute en el Apéndice B. Sin embargo, las condiciones en la superficie límite de la esfera son ahora diferentes, y el campo dentro de la esfera dieléctrica no es cero como ocurría en la esfera conductora. Mantendremos la generalidad del problema llamando K_1 a la constante dieléctrica de la esfera y K_2 a la de la región exterior a la esfera. Las funciones potenciales son V_1 dentro de la esfera ($r \leq a$) y V_2 fuera de ella ($r \geq a$). La solución de este problema debe satisfacer los requisitos siguientes:

1. $\nabla^2 V_1 = 0$ y $\nabla^2 V_2 = 0$; esto es, debe satisfacerse la ecuación de Laplace tanto dentro como fuera. Como en el caso de la esfera conductora estudiada en el Apéndice B, la función potencial debe estar formada por funciones armónicas.

2. $V_2 + E_0 r \cos\theta$ debe permanecer finito en el infinito. Como el campo uniforme original admite un potencial dado por $-E_0 x$

o $-E_0 r \cos\theta$, cuando suponemos que el potencial es cero en el origen (centro de la esfera), V_1 debe contener este término negativo. Esta condición indica simplemente que el término o términos adicionales debidos a la presencia de la esfera, deben hacerse despreciables a grandes distancias.

3. V_1 debe permanecer finito en todo el interior de la esfera ($r \leq a$).

4. $V_2 = V_1$ para $r = a$ y cualquier valor del ángulo θ. Si esto no fuera cierto, V presentaría una discontinuidad en la superficie. Este cambio brusco de V daría un valor infinito a su derivada en el punto de discontinuidad y el campo habría de ser también infinito.

5. $K_1 \partial V_1/\partial r = K_2 \partial V_2/\partial r$ para $r = a$ y cualquier valor de θ. Esta es precisamente la condición en la superficie límite de los dos dieléctricos, $D_{n1} = D_{n2}$, que puede escribirse $K_1 E_{n1} = K_2 E_{n2}$.

Basándonos en nuestros resultados anteriores para la esfera conductora, ensayaremos las soluciones siguientes, que están formadas por funciones armónicas, y, por tanto, sabemos que satisfacen la ecuación de Laplace.

$$V_2 = -E_0 r \cos\theta + \frac{A}{r^2}\cos\theta \tag{C.1}$$

$$V_1 = Br\cos\theta \tag{C.2}$$

Aun sin especificar el valor de las constantes A y B, estas soluciones satisfacen los requisitos 1 a 3. Con el fin de que se cumpla el 4 y de que V tenga un valor único en la superficie de la esfera, haremos

$$-E_0 a + \frac{A}{a^2} = Ba \tag{C.3}$$

Para satisfacer (5), expresaremos que $K_1 \partial V_1/\partial r = K_2 \partial V_2/\partial r$, resultando

$$K_2\left(-E_0 - \frac{2A}{a^3}\right) = K_1 B \tag{C.4}$$

Y si resolvemos el sistema (C.3), (C.4), nos queda

$$A = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + 2K_2} E_0 a^3$$

$$B = \frac{-3K_2}{K_1 + 2K_2} E_0$$

Si la esfera está situada en el vacío $K_2 = 1$, y para una cavidad esférica en el seno de un dieléctrico será $K_1 = 1$. En todos los casos

el potencial dentro de la esfera puede escribirse en la forma $V_1 = Bx$. Esto significa que el campo dentro de la esfera es uniforme. Para una esfera dieléctrica en el vacío, el campo uniforme original E_0 queda reducido al valor $[3/(K_1 + 2)]E_0$. Esta reducción es debida al campo uniforme que crean las cargas de polarización existentes en la superficie de la esfera, que actúa en oposición al campo original. La magnitud de este campo despolarizante E_{desp}, que se opone al campo original E_0, está dada en este caso por

$$E_{desp} = E_0 - E_2 = \left(1 - \frac{3}{K_1 + 2}\right) E_0 = \left(\frac{K_1 - 1}{K_1 + 2}\right) E_0 \tag{C.5}$$

Este campo puede expresarse en función de un *factor despolarizante* L que relacione el campo con la polarización del dieléctrico

$$\epsilon_0 E_{desp} = LP \tag{C.6}$$

en la que hemos incluido ε_0 por razones dimensionales.

El valor de L para la esfera puede obtenerse si advertimos que

$$P = \epsilon_0(K - 1)E \tag{C.7}$$

donde se ha suprimido el subíndice de K por conveniencia, y E es el campo macroscópico existente en el dieléctrico. Esta ecuación se deduce de las (5.3) y (5.9). Sustituyendo en la Ec. (C.6) resulta

$$L = \frac{(K - 1)/(K + 2)}{3(K - 1)/(K + 2)} = \frac{1}{3} \tag{C.8}$$

En este caso el potencial V_2 fuera de la esfera dieléctrica consta de un término $-E_0 r \cos\theta$ del campo original uniforme no perturbado, más un término $(A/r^2)\cos\theta$. Este último término da lugar a un campo dipolar, igual al que obtuvimos para un dipolo en el Ejemplo 3.7*b*. Por tanto, el campo fuera de una esfera dieléctrica uniformemente polarizada en un campo originalmente uniforme es precisamente igual al campo original uniforme superpuesto al campo de un dipolo debido a la esfera polarizada.

Por conveniencia en la Fig. C.1 se han dibujado las líneas de **D** en lugar de las de **E**, puesto que las líneas de **D** son continuas al atravesar la superficie del dieléctrico, mientras que las líneas de **E** no lo son. Aunque **D** dentro de la esfera dieléctrica es mayor que en el campo uniforme original, **E** resulta reducido, como consecuencia del campo despolarizante.

Al escoger una esfera hemos tomado una de las pocas formas

en que se aplica el concepto de factor despolarizante de modo riguroso, puesto que el campo en el interior de un cuerpo dieléctrico colocado en un campo uniforme no es en general uniforme. Para materiales isótropos, únicamente las muestras de forma elipsoidal dan campos interiores uniformes. Si uno de los ejes principales del elipsoide está situado paralelamente al campo aplicado, la polarización y el campo despolarizante tienen esta misma dirección (suponiendo también un dieléctrico isótropo).

APENDICE D

Números Complejos

En beneficio de los estudiantes que ya conocen los métodos de trabajo con magnitudes complejas, vamos a discutir brevemente su aplicación para resolver problemas en circuitos de corriente alterna. La notación compleja es muy atractiva en estos problemas porque simplifica enormemente su solución.

La notación compleja resulta particularmente indicada cuando se manejan funciones seno o coseno. Vamos a demostrarlo considerando las dos funciones sinusoidales que pueden emplearse para describir la tensión instantánea de un generador de corriente alterna, a saber

$$v = V_0 \cos \omega t \tag{10.2}$$

o

$$v = V_0 \operatorname{sen} \omega t \tag{10.1}$$

Los problemas de corriente alterna pueden resolverse empleando cualquiera de estas funciones, y físicamente los resultados deben ser idénticos, puesto que la única diferencia entre las dos es su valor para $t = 0$. Solo es necesario una traslación según el eje temporal de $\pi/2$, o sea $^1/_4$ de ciclo, para convertir una función en la otra. [En efecto, $\cos(\omega t + \pi/2) = \operatorname{sen} \omega t$.]

En notación compleja ambas funciones están incluidas en la expresión única

$$v = V_0 e^{j\omega t} \tag{D.1}$$

siendo $j = (-1)^{1/2}$. Para obtener este resultado basta escribir el desarrollo en serie de la exponencial e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{D.2}$$

y darse cuenta de que

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

y

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

son precisamente los desarrollos en serie de sen x y cos x. Si entonces sustituimos x por $j\omega t$, obtenemos

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t \tag{D.3}$$

[nótese que $(-1)^{1/2}(-1)^{1/2} = -1$]. $e^{j\omega t}$ es un número complejo, puesto que es la suma de dos términos, uno *real* y el otro *imaginario*, es decir, que contiene a j.

Los números complejos pueden representarse gráficamente en el plano complejo como se indica en la Fig. D.1. En ella se ha dibuja-

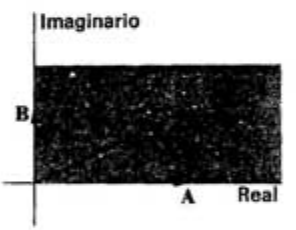


Fig. D.1 Un número complejo N representado en el plano complejo, indicándose las partes real e imaginaria, **A** *y* **B**.

do el número complejo $\mathbf{N} = \mathbf{A} + j\mathbf{B}$: la parte real **A**, sobre el eje *real* (horizontal); la parte imaginaria **B**, sobre el eje *imaginario* (vertical). El número complejo N resulta ser la suma vectorial que se indica. El conocimiento de **A** y **B** es equivalente a conocer el módulo de **N** y el ángulo θ.

Vamos a emplear la notación compleja para obtener la solución del circuito serie *RLC*. Escribamos la ecuación diferencial que relaciona la tensión sinusoidal del generador a la suma de las tensiones instantáneas entre extremos de R, L y C:

$$V = V_0 e^{j(\omega t - \theta)} = iR + L\frac{di}{dt} \pm \frac{1}{C}\int i\,dt \tag{D.4}$$

En el exponente se ha incluido un ángulo θ para tener en cuenta la diferencia de fase entre la tensión y la intensidad. Como la intensidad i es sinusoidal, podemos escribir

$$i = I_0 e^{j\omega t} = I_0 (\cos \omega t + j \operatorname{sen} \omega t) \tag{D.5}$$

En este momento no vamos a limitarnos a la parte real o a la imaginaria, sino que vamos a operar con ambas partes. Al final podremos quedarnos o con la parte real (apropiada para $i = I_0 \cos \omega t$) o con la parte imaginaria (apropiada para $i = I_0 \operatorname{sen} \omega t$). A continuación obtendremos di/dt y $\int i\,dt$ que necesitamos en la ecuación anterior:

$$\frac{di}{dt} = I_0 \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = I_0 j\omega e^{j\omega t} \tag{D.6}$$

$$\int i\,dt = I_0 \int e^{j\omega t}\,dt = I_0 \frac{1}{j\omega} e^{j\omega t} \tag{D.7}$$

Sustituyendo en la Ec. (D.4) nos queda

$$\begin{aligned} V_0 e^{j(\omega t - \theta)} = V &= I_0 \left(R e^{j\omega t} + j\omega L e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} e^{j\omega t} \right) \\ &= \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) I_0 e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Si tomamos, por ejemplo, la parte real de esta ecuación nos resulta

$$i = \frac{V_0 \cos(\omega t - \theta)}{[R + j(\omega L - 1/\omega C)]} \tag{D.8}$$

esencialmente como la Ec. (10.16). La expresión compleja del denominador tiene el mismo significado que la impedancia **Z** obtenida anteriormente. Esto puede verse comparando con la Fig. 10.12, si asociamos la parte real R con el eje x de aquella figura y la parte imaginaria $j(\omega L - 1/\omega C)$ con el eje y. También resulta evidente que el ángulo de fase viene dado, como en nuestro anterior estudio, por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \tag{10.17}$$

Hemos visto, pues, que es muy sencillo manejar el circuito serie *RLC* si escribimos los tres términos de impedancia como R, $j\omega L$ y $1/j\omega C$. El circuito *RLC* paralelo puede resolverse exactamente de la misma forma. Dejamos al lector el problema de demostrar que la ecuación del circuito paralelo *RLC* (10.26) puede obtenerse empleando la notación compleja.

APENDICE E

Efecto de los Procesos Primario y Secundario de Multiplicación Sobre la Conductividad Eléctrica de los Gases

En la Fig. E.1 se indican dos electrodos planos y paralelos en el seno de un gas. Vamos a considerar los siguientes procesos: una fuente externa de radiación produce n_0 electrones por segundo en la inmediata proximidad del cátodo; además son emitidos por el cátodo otros n_s electrones por segundo como consecuencia de pro-

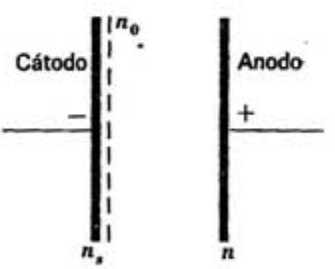


Fig. E.1 Multiplicación de electrones en una descarga gaseosa. El número de electrones formados cerca del cátodo por una fuente externa es n_0, el número incrementado de los que llegan al ánodo es n, y el de electrones secundarios producidos en el cátodo es n_s. Los procesos primario y secundario de multiplicación en concurso pueden conducir a una descarga automantenida.

cesos secundarios desencadenados por el proceso primario de multiplicación que tiene lugar en el gas. Estos últimos pueden ser bien fotoelectrones bien electrones resultantes del choque de iones positivos con el cátodo. El flujo total de electrones que sale de la región catódica, $(n_0 + n_s)$/seg, resulta multiplicado por el proceso de

avalancha y da lugar a que el número de electrones que alcanzan el ánodo por segundo sea

$$n = (n_0 + n_s)e^{\alpha x} \tag{E.1}$$

para lo que hemos hecho uso de la Ec. (13.4). Vamos ahora a definir una magnitud γ como la probabilidad de que sea liberado en el cátodo un electrón secundario por un proceso secundario asociado con cada fenómeno primario de multiplicación. Ahora bien, el número de procesos primarios que tienen lugar por segundo es precisamente la diferencia entre el número de electrones que llegan por segundo al ánodo y el número de electrones que parten del cátodo por segundo. Esto es

$$n - (n_0 + n_s)$$

El número de electrones secundarios producidos por segundo en el cátodo vendrá dado entonces por la expresión

$$n_s = \gamma[n - (n_0 + n_s)]$$

Reagrupando términos en esta última ecuación, podemos escribir la expresión que nos dé el número total de electrones que abandonan el cátodo por segundo,

$$n_s + n_0 = \frac{\gamma n + n_0}{1 + \gamma}$$

Y si sustituimos esto en la Ec. (E.1), y despejamos n, tenemos

$$n = n_0 \frac{e^{\alpha x}}{1 - \gamma(e^{\alpha x} - 1)}$$

Por otra parte, $e^{\alpha x}$ es normalmente mucho mayor que 1, de modo que podemos utilizar la ecuación aproximada

$$n = n_0 \frac{e^{\alpha x}}{1 - \gamma e^{\alpha x}} \tag{E.2}$$

Como la intensidad de la corriente es proporcional al número de electrones por segundo, también puede escribirse en la forma

$$i = i_0 \frac{e^{\alpha x}}{1 - \gamma e^{\alpha x}} \tag{E.3}$$

Algunas de las Constantes Físicas Fundamentales

Carga del electrón	e	$1{,}60 \times 10^{-19}$ culombio
Permitividad del vacío	ϵ_0	$8{,}85 \times 10^{-12}$ culombio^2/newtonio-m^2
	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	9×10^{9} newtonio-m^2/culombio^2
Permeabilidad del vacío	μ_0	$1{,}26 \times 10^{-6} = 4\pi \times 10^{-7}$ weberio/amp-m
	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	10^{-7} weberio/amp-m
Campo de inducción magnética	B	1 weberio/m^2 = 10.000 gauss
Velocidad de la luz	C	$3{,}00 \times 10^{8}$ m/seg = $1{,}86 \times 10^{5}$ m/seg
Masa en reposo del electrón	m_e	$9{,}11 \times 10^{-31}$ kg
Masa en reposo del protón	m_p	$1{,}67 \times 10^{-27}$ kg
Relación entre la carga y la masa del electrón	$\frac{e}{m_e}$	$1{,}76 \times 10^{11}$ culombios/kg
Momento magnético del electrón	μ_e	$9{,}29 \times 10^{-18}$ julio-m^2/weberio
Constante de Planck	h	$6{,}63 \times 10^{-34}$ julio-seg
Constante de Boltzmann	k	$1{,}38 \times 10^{-23}$ julio/°K
Electrón-voltio	eV	$1{,}60 \times 10^{-19}$ julio

Soluciones a los Problemas con Numeración Impar

1.1 $Q_2 = -4Q_1$

1.3 (*a*) $F = 0$

(*b*) $F = 9 \times 10^{13} Q^2$ newtonios

1.5 (*a*) $F = 0$

(*b*) $F = 2{,}88 \times 10^7$ newtonios

1.7 $4{,}27 \times 10^{42}$

2.1 (*a*) $E = 0$

(*b*) $E = \dfrac{4Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3/2}$

$= 2{,}2 \times 10^{12} Q$ newtonios/culombio

(*c*) $E = \dfrac{4Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{1}{0{,}03}$ newtonios/culombio

2.3 -1.77×10^{-8} culombio

2.5 $^9/_4\mu \times 10^9$ newtonios/culombio

2.7 (*a*) $E = 0$

(*b*) $E = \dfrac{12{,}5Q}{4\pi\epsilon_0}$ newtonios/culombio

(*c*) $E = \dfrac{25Q}{4\pi\epsilon_0}$ newtonios/culombio

(*d*) $E = \dfrac{4Q}{4\pi\epsilon_0}$ newtonios/culombio

2.9 $E = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2Q}{\pi r^2}$ newtonios/culombio

2.11 0

2.13 $F = KaQ = Kp$ newtonios

2.15 $E = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 2R^2}$ newtonios/culombio

3.1 (*a*) $V_s = \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0 (a^2 - l^2/4)}$ voltios

$W = QV_s$ voltios

(*b*) $V_s = \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ voltios

$E = \dfrac{2p}{4\pi\epsilon_0 a^3}$ voltios

3.3 $V_{int} = \dfrac{\rho}{6\epsilon_0}(3R^2 - r^2)$ voltios

$V_{ext} = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r}$ voltios

$E_{int} = \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}$ voltios/m

$E_{ext} = \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$ voltios/m

3.5 $V = 10^7$ voltios

3.7 (*a*) $Q_{ext} = 4\pi\epsilon_0 V_1 b$

$Q_{int} = -Q_1$

(*b*) $r < a$: $E = 0$

$V = V_1 + \dfrac{Q_1(b - a)}{4\pi\epsilon_0 ab}$ voltios

$a < r < b$: $E = \dfrac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ voltios/m

$V = V_1 + \dfrac{Q_1(b - r)}{4\pi\epsilon_0 rb}$ voltios

$r > b$: $E = \dfrac{V_1 b}{r^2}$ voltios/m

$V = \dfrac{V_1 b}{r}$ voltios

3.9 $V_{12} = \dfrac{Q}{2\pi\epsilon_0}\ln\dfrac{r_2}{r_1}$ voltios

3.11 $V = 1{,}87 \times 10^7$ m/seg

3.13 $V_2 = 2^{2/3} V_1$ voltios

3.15 (*b*) $x = 32{,}3$ cm, $-7{,}65$ cm, -20 cm

(*c*) Punto de equilibrio, $x = -20$ cm, estable para carga $-$, inestable para carga $+$

3.17 $E_r = \dfrac{2a \cos\theta}{r^3} + \dfrac{b}{r^2}$ voltios/m

$E_\theta = \dfrac{a \operatorname{sen}\theta}{r^3}$ voltios/m

4.1 $C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln (b/a)}$ faradios

4.3 $C = \dfrac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$ faradios

4.5 $C_2 = \dfrac{C_1 d}{d - a}$ faradios

4.7 $F = \dfrac{A\epsilon_0 V^2}{2d^2}$ newtonios

4.9 $C = \dfrac{6\epsilon_0 A}{d}$ faradios

4.11 $V_1 = 150$ voltios

$V_2 = 50$ voltios

$Q_1 = Q_2 = 3 \times 10^{-4}$ culombios

4.13 (*a*) $U = \dfrac{Q_2}{8\pi\epsilon_0 R}$ julios

(*b*) $r = 2R$

4.15 $Q = -q$ culombios

4.17 $\Delta U = \dfrac{1}{2} Q_0^2 \dfrac{C_2}{C_1^2 + C_1 C_2}$ julios

5.1 $\sigma_1 = -P$

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = P \operatorname{sen}\theta$

5.3 $V_2 = \dfrac{V_1}{K}$ voltios

$U_2 = \dfrac{U_1}{K}$ julios

Las láminas son impulsadas hacia dentro

5.7 $P = -\sigma_e$

$\chi = \infty$

5.9 $V_2 = \dfrac{2V_1}{1 + K}$ voltios

$\Delta Q = \dfrac{CV_1(K - 1)}{1 + K}$ culombios

5.11 $\Phi_2 = 24° 28'$

6.1 $\dfrac{F}{l} = \dfrac{\mu_0 i i'}{2\pi a} = 2 \times 10^{-4}$ newtonios/m (atractiva)

6.3 $B = \dfrac{\mu_0 j r}{2}$ weberios/m^2 $\quad r < a$

$B = \dfrac{\mu_0 a^2 j}{2r}$ weberios/m^2 $\quad r > a$

6.5 $B = \dfrac{\mu_0 i}{4r}$ weberios/m^2

6.7 $B = \dfrac{\mu_0 i r}{2\pi a^2}$ weberios/m^2 $\quad r < a$

$B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}$ weberios/m^2 $\quad a < r < b$

$B = \dfrac{\mu_0 i}{2\pi r}\left(1 - \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$ weberios/m^2 $\quad b < r < c$

$B = 0 \quad r > c$

6.9 (*a*) $f = \dfrac{Ni}{L} = 3 \times 10^4$ amperios/m

(*b*) $B_1 = \dfrac{\mu_0 Ni}{L} = 12\pi \times 10^{-3}$ weberio/m^2

(*c*) $B_2 = \dfrac{\mu_0 Ni}{2L} = 6\pi \times 10^{-3}$ weberio/m^2

(*d*) $\Phi = B_1 A = 48\pi^2 \times 10^{-7}$ weberio

(*e*) $\Phi = B_2 A = 24\pi^2 \times 10^{-7}$ weberio

6.11 $B = \dfrac{\mu_0 \sigma \omega a^4}{8b^3}$ weberios/m^2 $\quad b \gg a$

6.13 $\tau = 5\pi \times 10^{-2}\, B \operatorname{sen}\theta$ newtonio–m

6.15 $\Phi = 1{,}1 \times 10^{-7}$ weberio

6.17 $R_H = 6{,}25 \times 10^{-10}$

$N = 10^{28}$ electrones/m^3

6.19 (*a*) $\omega = 4{,}8 \times 10^7$ radianes/seg

(*b*) $W = 1{,}92 \times 10^{-12}$ julio

$= 1{,}2 \times 10^7$ electrón–voltio

(*c*) $n = 300$ revoluciones

6.23 $m = 7{,}2 \times 10^{-26}$ kg

6.27 $B_b = \dfrac{\mu_0 i}{\pi r}$ weberios/m^2

$B_a = \dfrac{\mu_0 i}{r}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2\pi}\right)$ weberios/m^2

6.29 $B = \dfrac{\mu_0 i}{2r}$ weberios/m^2

7.1 $i = {}^2/_3 \pi j_0 a^3$ amperios

7.3 $v = 0{,}0625$ m/seg

7.5 $R = 1{,}7 \times 10^{-5}$ ohmio

7.7 $R_2 = 1$ ohmio

7.9 $R = {}^1/_4 \times 10^{-4}$ ohmio

7.11 $R_0 = (1 + \sqrt{3})R$ ohmios

7.13 (*a*) $i = 2$ amperios

(*b*) $i_1 = 2$ amperios

$i_4 = 1$ amperio

$i_8 = 1$ amperio

$i_6 = {}^2/_3$ amperio

$i_{12} = {}^1/_3$ amperio

(*c*) $P_1 = 4$ vatios
$P_4 = 4$ vatios
$P_6 = {}^8/_3$ vatio
$P_8 = 8$ vatios
$P_{12} = {}^4/_3$ vatio
$P_i = 4$ vatios
(*d*) $P = 24$ vatios
(*e*) $V = 10$ voltios

7.17 (*a*) $R_v = 9.990$ ohmios
(*b*) $R_a = 1{,}111$ ohmios

7.19 $R_1 = 0{,}0278$ ohmios
$R_2 = 0{,}250$ ohmios
$R_3 = 2{,}50$ ohmios

8.1 (*a*) $F = evB$ newtonios
dirigida hacia arriba para electrones
(*b*) $E = vB$ voltios/m hacia arriba
(*c*) $V = vBL$ voltios
(*d*) $i = \dfrac{vBL}{R}$ amperios
(*e*) $\mathcal{E} = vBL$ voltios

8.3 $L' = 3L$ henrios

8.5 $\mathcal{E} = {}^1/_2\omega L^2 B$ voltios

8.7 $\mathcal{E}_{max} = \pi^2 f R^2 B$ voltios
$i_{max} = 10^{-3}\pi^2 f R^2 B$ amperios
f = frecuencia

8.11 $\mathcal{E} = \dfrac{\mu_0 iab}{2\pi}\dfrac{V}{l(l+a)}$ voltios

8.13 $L = \dfrac{\mu_0 N^2 A}{l}$ henrios

8.15 $\Phi = 0{,}5 \times 10^{-4}$ weberios

8.17 $W = 10^4$ julios

9.1 (*a*) $j_v^a = 13.333$ amperios/m
(*b*) $H = 13.333$ amperios/m
(*c*) $\mu = 1{,}28 \times 10^{-6}$ weberios/amperios-m
(*d*) $M = 267$ amperios/m
(*e*) $B = 17{,}1 \times 10^{-3}$ weberios/m^2

9.3 (*a*) $L = 1{,}8$ henrios
(*b*) $H = 2{,}39 \times 10^4$ amperios/m
(*c*) $j_v^a = 2{,}39 \times 10^4$ amperios/m
(*d*) $M = 2{,}39 \times 10^7$ amperios/m
(*e*) $j_{mag}^a = 2{,}39 \times 10^7$ amperios/m
(*f*) $U = 22{,}5$ julios

9.5 $\dfrac{X_1}{X_2} = (2\cot\theta)^{-1/3}$

9.7 $\chi = 3{,}28 \times 10^{-3}$
$p_m = 2{,}61 \times 10^{-3}$ amperios/m^2
$M = 1{,}8 \times 10^6$ amperios/m
$p_m = 18$ amperios-m^2

$\tau = 1{,}8 \times 10^{-6}$ newtonios-m
$q_m = 180$ unidades de polo

9.9 $F = \dfrac{N^2 i^2 A}{\mu_0}\left(\dfrac{l}{\mu} + \dfrac{2x}{\mu_0}\right)^2$ julios

10.1 (*a*) $i = \dfrac{V_0}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}\operatorname{sen}(\omega t + \Phi)$

$\Phi = \operatorname{tg}^{-1}\dfrac{\omega L}{R}$

(*b*) $\Delta\Phi = 0$
(*c*) $\Delta\Phi = -90°$
V_R retrasado respecto a V_L
(*d*) $V_R = \dfrac{V_0 R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}$ voltios

$V_L = \dfrac{V_0 \omega L}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}$ voltios

10.3 (*a*) $X_L = 755$ ohmios
(*b*) $X_c = 53$ ohmios
(*c*) $f = 15{,}9$ ciclos/seg

10.5 (*a*) $V_{ef} = 85$ voltios
(*b*) $I_0 = 6$ amperios
(*c*) $I_m = 0$
(*d*) $I_{ef} = 4{,}25$ amperios
(*e*) $p = 360$ vatios

10.7 (*a*) $Z = 800$ ohmios
(*b*) $P = 4$ vatios
(*c*) $C = 3{,}84\ \mu$F

10.9 $V_{ef} = 38$ voltios

10.11 (*a*) $\omega = \dfrac{1}{(LC)^{1/2}}$ radianes/seg
(*b*) $\omega_{max} = 0, \infty$
$\omega_{min} = \dfrac{1}{(LC)^{1/2}}$ radianes/seg
(*c*) $\omega = \dfrac{\sqrt{3}/R \pm (3/R^2 + 4C/L)^{1/2}}{2C}$
radianes/seg

10.15 $R_1 = 500$ ohmios
$\dfrac{di}{dt} = -120$ amperios/seg

10.17 $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5n_1}{2n_2}$

11.1 (*b*) $\Delta V_p = 25$ voltios

12.5 (*a*) $\lambda = 300$ m
(*b*) $E_0 = 122{,}6$ voltios/m
$H_0 = 0{,}325$ amperios/m

12.7 $E_0 = 1.020$ voltios/m
$B_0 = 3{,}4 \times 10^{-6}$ weberios/m^2

12.9 $\lambda_g = 2{,}04$ cm
$V_p = 4{,}9 \times 10^8$ m/seg
$V_g = 1{,}83 \times 10^8$ m/seg

Indice

Indice

Aislantes, 22
Ampere, A. M., 127
Ampere (unidad), 139
Amperímetro, 178, 179
  térmico, 299
Análisis de Fourier, 296
Angulo sólido, 50, 51
Anodo, 314
Antiferromagnetismo, 253
Arco, descarga en, 366
Autoinducción, 206-207
  cálculo de, 209

Banda de conducción en semiconductores, 321
Banda prohibida en semiconductores, 320-321
Base de un transistor, 323
Bobina de prueba, 219-222

Calor, equivalente mecánico del, 169
Campo desmagnetizante, 259
  (*Ver también* Factor desmagnetizante)
Campo eléctrico, 37
  de cargas puntuales, 38, 40
    aplicando el teorema de Gauss, 54
  en un condensador, 109
  deducido del potencial, 74, 75
  de carga puntual, 74
  dentro de un conductor hueco, 58-60
  de un dipolo, 42, 147
    a partir del potencial, 75
  de una distribución lineal de carga, 41
  de una distribución plana de carga, 44, 45
    aplicando el teorema de Gauss, 56, 57
  local, 120
  medio en un dieléctrico, 104
Campo magnético, cálculo mediante el teorema de Ampere, 143
  de un conductor indefinido, 134, 135-143
  de una corriente, 131, 133
  de un dipolo, 147
  en el eje de una espira circular, 135, 136
  energía almacenada en, 215-218
  de una esfera uniformemente magnetizada, 266, 267
  una espira en, 203
  de una lámina delgada, 265
  movimiento de un fluido conductor en, 376
  movimiento de partículas, 148, 149, 366-374
  propiedades del, 138-142
  de un solenoide, 137, 138
  terrestre, 265
  trabajo mecánico realizado al mover una espira en, 203
  de una varilla imanada, 265
Campo terrestre, origen del, 265
Capacidad, 82-85
  en circuitos de corriente alterna, 281, 282
  de un condensador plano, 84
  entre conductores esféricos concéntricos, 85
  de una esfera conductora, 83
    rodeada por otra hueca, 86
  con una lámina dieléctrica, 109
  con dos láminas dieléctricas, 110
Capacidad inductiva específica, 97-106
Capacidades, en paralelo, 88
  en serie, 87, 88
Cargas eléctricas, 22-24
  energía propia de las, 91
  y materia, 32
  de polarización, 99

Carga espacial, 314
corriente limitada por, 314
Carga imagen, 80
Cátodo, 314
Ciclo de histéresis, 253
Ciclotrón, 151
Circuitos acoplados, inductancia mutua, 207, 208
Circuitos de corriente alterna, autoinducción, 279-281
capacidad en los, 281, 282
circuito *RLC* paralelo, 287, 288
circuito *RLC* serie, 282-287, 408, 409
factor de potencia, 299
fase, 285, 409
filtros, 294-296
impedancia, 285
notación compleja en, 408, 409
potencia en, 296-299
reactancia capacitiva en, 282-286
reactancia inductiva en, 280-286
relaciones entre tensión e intensidad, 278-282
resistencia, 278, 279
resonancia, 289
transformador, 301-304
transitorios, 290-294
valores eficaces de la tensión y la intensidad, 296-299
vector generatriz, 279
Circuitos eléctricos, 172-176
filtros, 294-296
magnéticos, 268-270
tanque, 318
teorema de Ampere, 140, 331
triodo, 318
(*Ver* Circuitos)
Citas, de Ampere, 128
de Coulomb, 25
de Faraday, 199
de Maxwell, 333, 334
Colector de un transistor, 323
Condensador, 83-85
campo eléctrico en el dieléctrico, 109
combinación de, en paralelo, 88
en serie, 87, 88
energía almacenada en, 88-90
fuerza entre las placas, 91, 114-116
Condiciones en la superficie límite, entre dos dieléctricos, 111-112
entre materiales magnéticos, 238, 239
Conductividad eléctrica en gases, procesos de multiplicación, 411
Conductores, 22, 46
Conmutador, 210
Conservación de la energía, en el campo magnético, 200
eléctrico, 66, 67, 88, 89
en generadores, 201
Constante de Boltzmann, 187
valor de la, 413
Constante de tiempo de un circuito, 291
Constantes, tabla de, 413
Corriente, 159-161
campo magnético de una, 131-133
densidad de, 160
de desplazamiento, 331-334
de Foucault, 222-224
limitada por carga espacial, 314
superficial solenoidal, 267, 268
Corriente superficial de Ampere, 233, 267
Coulomb, C. A., 25, 26
cita de, 25
Cuadrupolo eléctrico, 62
Cuantización magnética, 385
Cuanto, 382

Chispa eléctrica, 361-364
Choque, elástico, 359
ionización, por, 361, 362
tabla, 362
sección eficaz de, 360

Densidad de corriente solenoidal, 138, 231
Densidad lineal de carga, 31
Densidad de líneas magnéticas, 138
Deriva, velocidad de, 368
Descarga en arco, 366
Descarga, en corona, 365, 366
en un gas, procesos de multiplicación, 410, 411
luminosa, 365
Descarga eléctrica, 361-364
Desplazamiento de corriente, 331-334
Desplazamiento eléctrico, 106
Diamagnetismo, 234-236, 245-248
Dieléctricos, condiciones en la superficie de separación, 110-112
constante, 97-105
energía almacenada en, 114
fuerza entre cargas en un, 113, 114
Diferencia de potencial de contacto, 186
Diodo, 314-316
Dipolo eléctrico(s), campo de un, 75, 147
para sobre un, 44
Dipolos atómicos magnéticos, 231, 242, 243
Dipolos magnéticos, 144
campo de, 147
inducido, 245

Dipolos magnéticos, en la materia, 231
permanente, 241
Disipación de energía en una resistencia, 168, 169
Dominios ferromagnéticos, 250, 251
paredes entre, 251

Ecuación del ciclotrón, 149
Efecto Compton, 384
fotoeléctrico, 379-382
Hall, 152, 153
para medir la densidad de portadores, 184
pelicular, 224, 225
Peltier, 190
Seebeck, 190
Thomson, 190
Eficaz en alterna, 296-298
Elásticos, choques, 359
Eléctrico, campo, 37
desplazamiento, 106-112
Electrodinamómetro, 299, 300
Electróforo, 33
Electromagnéticas, ondas (*véase* Ondas electromagnéticas)
Electrómetro absoluto de Kelvin, 93
Electrón (s), 76
carga del, 77
determinación de e/m, 151
valor de e/m, 413
energía propia del, 91
masa del, 413
momento magnético del, 413
en semiconductores, 302
spin del, 244, 250
en los metales, 248
Electrón-volt, 77, 78
Electrones de conducción, 32, 161-164, 183, 184
en semiconductores, 321
Electrónico, microscopio, 385
Electroscopio, 33, 92
Electrostática, carga, 22-24
generadores, 35
Elementos de corriente, fuerza magnética entre, 127-133
e/m, determinación de, 151
valor de, 413
Emisión, de campo, 379
secundaria, 379
termoiónica, 379
Emisor de un transistor, 323
Energía almacenada en un medio, 114
bandas en semiconductores, 320, 321
en el campo eléctrico, 90
en el campo magnético, 215-218
disipada en una resistencia, 168, 169
en los medios magnetizados, 240, 241
propagación en las ondas electromagnéticas, 343-346
propia del electrón, 91
Energía magnética almacenada en un medio, 240
en el vacío, 215-218
Energía potencial, 68
Enlazante, flujo magnético, 204
Esfera dieléctrica en un campo uniforme, 403
Esfera magnetizada, 261, 262
Espectros atómicos, 382
Espejo magnético, 371
Espira, campo magnético en el eje, 135, 136
convenio de signos, 136
par sobre una, 144, 145
Estados excitados, 363

Faraday, M., cita de, 199
ley de inducción de (*véase* Inducción)
Faradios, 82
Fase, velocidad de, 355
Ferrimagnetismo, 253
Ferritos, 254, 304
Ferroeléctricos, materiales, 122
Ferromagnetismo, 235, 236, 249-253
ciclo de histéresis, 253
campos, eléctricos (*ver* Campos eléctricos)
dominios, en, 251
fuerza coercitiva en, 253
pérdidas por histéresis, 254-256
magnéticos (*ver* Campos magnéticos)
contra potencial, 74, 75
remanencia en, 253
saturación, en, 252
Filtros, circuitos, 294-296
Físicas, constantes, 413
Flujo magnético, 142, 204
convenio de signos, 136-144
enlazante, 204
Fotoelectrones, 379
liberación de, 363
Fotón, 382
Foucault, corriente de, 222-224
pérdidas por, 303
Frecuencia, 276
Fuerza coercitiva, 253
Fuerza contraelectromotriz de un motor, 210, 211
Fuerza electromotriz, 169-171
de un generador, 209, 210
inducida, 195-197
de una pila, 185-187

Fuerza electromotriz, serie de tensiones, tabla, 186
térmica, 190
Fuerza magnética, entre elementos de corriente, 127-133
sobre una carga en movimiento, 147-149
Fuerza magnetomotriz, 270
Fuerza, sobre una carga en movimiento, 147-149
entre cargas en un medio dieléctrico, 113, 114
entre cargas puntuales, 30
debida a una distribución lineal de carga, 30
entre elementos de corriente, 127-133
entre placas del condensador, 91
sobre un polo magnético, 264
Función trabajo, 188-189
Funciones armónicas, 401

Galvanómetro, 176-179
balístico, 219-222
constante del, 177, 221
índice de mérito del, 178
rectificador, 300
Gauss, aplicado, a **B**, 236
a cargas en un medio dieléctrico, 113, 114
a **D**, 106, 107
a **E**, 54-59, 397
a **H**, 257
en dieléctricos, 103
teorema de, 50-54
(unidad), 138
Generación de ondas electromagnéticas, 347-349
Generador, 304-306
auto-excitado, 304, 305
conservación de la energía en, 201
fuerza electromotriz del, 209, 210
trifásico, 305
Generatriz, vector, circuitos de corriente alterna, 279
Guía de ondas, frecuencia de corte, 354, 355

Henry, J., 206
(unidad), 206
Hertz, H., 379
Huecos en semiconductores, 321

Imanes, permanentes, 262-265
Impedancia, 285
del circuito *RLC* paralelo, 287
del circuito *RLC* serie, 286
Indice de mérito, galvanómetro, 178
Inducción, en autoinducciones, 206, 207
campo eléctrico inducido, 218, 219
en diamagnetismo, 245
y fuerza electromotriz debida al movimiento, 198
en inductancia mutua, 204
ley de Faraday, 197-199
en las ondas electromagnéticas, 330
en pérdidas por histéresis, 254
Inducido, momento magnético, 248
Inductancia, en corriente alterna, 279-281
mutua, 204-206
cálculo de, 212-213
en paralelo, 215
en serie, 214
Integral curvilínea, 64, 65
Integral de superficie, 50, 51
Intensidad del campo magnético, 234
teorema de Gauss, 257
Intensidad de la corriente, 159-161
de las ondas electromagnéticas, 343
Ionización por choque, 361, 362
tabla, 362

Klinstrón, 326, 327
electrones en el, 327

Laplace, ecuación de, 76, 397-399
Larmor, frecuencia de, 246
Laue, M. von, 383
Lenerd, Ph., 380
Lenz, ley de, 199, 200
momento dipolar inducido, 247
en el transformador, 303
Ley de Coulomb, 22-29
Líneas de fuerza, eléctricas, 46-49
magnéticas, 132
Líneas magnéticas, 132
Luminosa, descarga, 365

Magnética, contribución de la materia, 230-234
Magnético, campo (*véase* Campo magnético)
circuito, 268-270
dipolo (*véase* Dipolo)
espejo, 371
Magnetismo en metales, 248
Magnetización, 231, 242
Magnetizado, energía almacenada en un cuerpo, 240-242
Magnetohidrodinámica, 374
Maxwell, J. C., 329
cita de, 333, 334
ecuaciones de, 338
Mecánica cuántica, 378
Mecánico equivalente del calor, 169
trabajo realizado al mover una bobina en un campo magnético, 202, 203
Medidas de intensidades, 176-181
Metales, magnetismo en, 248

Metales, resistividad de, 182-185
spin electrónico en, 248
Microscopio electrónico, 385
Momento dipolar, eléctrico, 44
de una esfera conductora, 401
magnético, 136-145
magnético atómico, 242, 243
por unidad de volumen, 99, 100
Momento magnético, del electrón, 244, 250
valor, 413
inducido, 248
del neutrón, 253
nuclear, 244
Motor elemental, 203, 204
de excitación paralelo, 307, 308
de excitación serie, 307, 308
fuerza contraelectromotriz en, 210, 211
de inducción, 308
síncrono, 307-309
trifásico, 306
Movilidad, 359
iónica, 360
Movimiento, fuerza electromotriz, 195-197
y ley de Faraday, 197
Mutua inductancia, 204-206
cálculo de, 212, 213
en circuitos acoplados, 207-209

Neutrón, momento magnético, 253 nota
Nivel de Fermi, 188
Niveles aceptores en semiconductores, 323
Niveles dadores en semiconductores, 323
Norte, polo magnético, 264
Nuclear, momento magnético, 244
Números complejos, 407

Oersted, H. D., 250
Ohm, G. S., 161
ley de, 161-168
Ondas, 334-338
electrónicas, 384, 385
magnetohidrodinámicas, 374-376
propagación de una cuerda tensa, 334-338
Ondas, ecuación de una onda transversal de una cuerda, 336
Ondas electromagnéticas, 338-342
generación de, 347-349
en guías, 352-355
intensidad de, 343
naturaleza transversal de, 342-343
propagación de energía en, 343-346
reflexión de, 349-352
refracción de, 349-352
velocidad de, 341
Oscilador, autoexcitado, 318-319
Oscilógrafo, 300-301
Oscilógrafo de rayos catódicos, 300, 301

Par, magnético sobre una barra imanada, 264
sobre una espira, 144, 145
sobre un dipolo eléctrico, 44
sobre un dipolo magnético, 144-145
Paralelo, circuito *RLC*, 287, 288
Paramagnetismo, 234-236
cálculo del, 241-244
Parámetros magnéticos de la materia, 235, 236
Pérdidas por histéresis, 254-256
en transformadores, 303
Permanente, imán, 262-265
Permeabilidad magnética del vacío, 129
de la materia, 235
relativa, 235
Permitividad, de la materia, 105
del vacío, 28
Pila eléctrica, fuerza electromotriz, 185-187
Placa, 314
Planck, M., 381
constante de, 381
Plasma, 366, 374
Poisson, ecuación de, 76, 397, 398
Polarizabilidad, atómica, 119, 120
dipolar, 122
electrónica, 121
iónica, 122
Polarización, cargas de, 99, 100
Polarización de la materia, 98
Polo magnético, 259
fuerza sobre, 264
norte y sur, 264
Potencia, en circuitos de alterna, 297-299
factor de, 299
en transformadores, 303
Potencial, 69-70
campo eléctrico, 72, 73
de contacto, 187-190
debido a varias cargas puntuales, 71
diferencia de, 69, 70
en las proximidades de una línea cargada, 71, 72
magnético, 142
problemas de, solución general, 92
Poynting, vector de, 343-346, 350
Procesos cuasi-estáticos, 66
Producto escalar, 50-51
Protón, masa del, 413
Puente de Wheatstone, 181, 182
Pulsación, 277

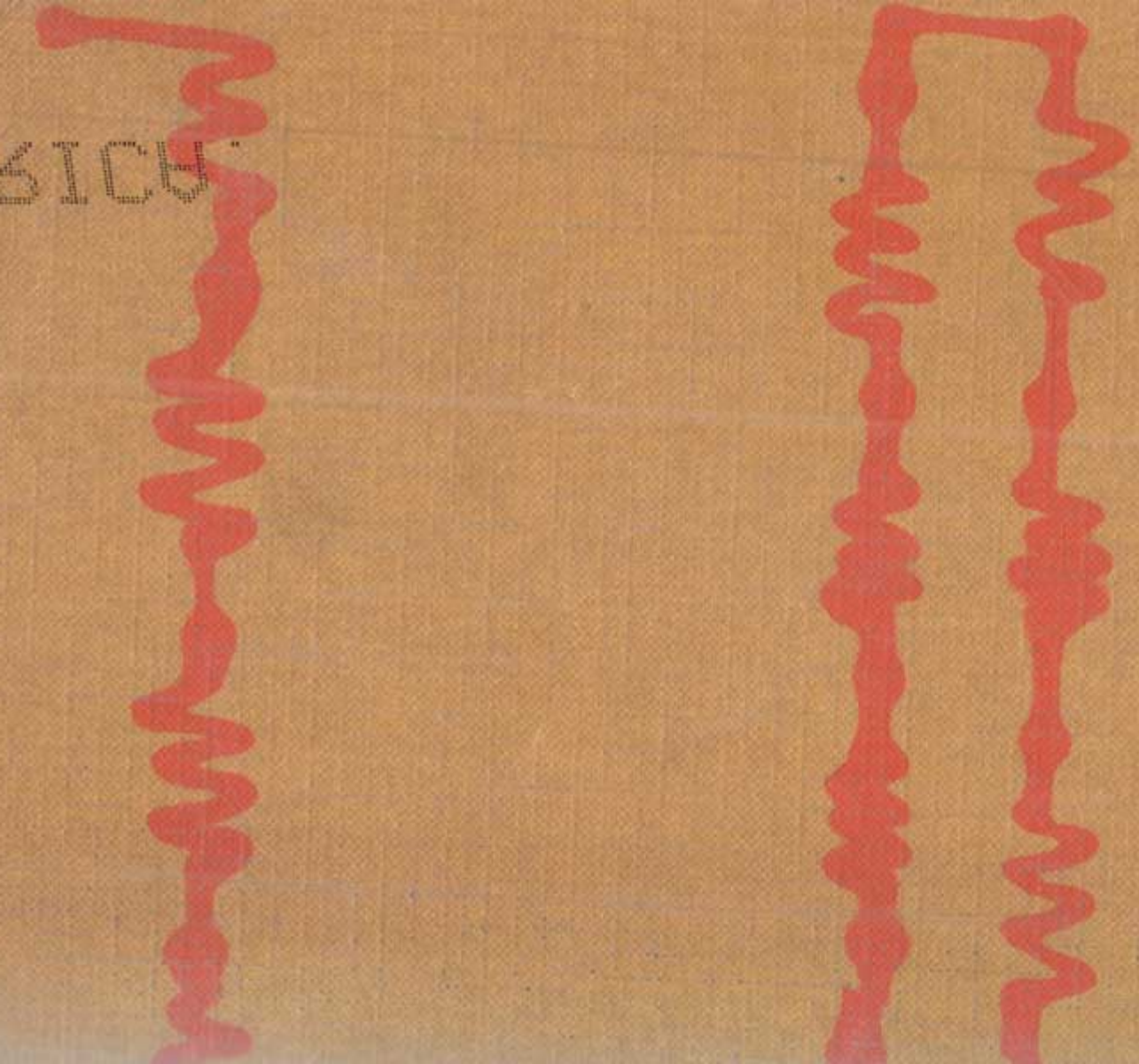
Rabi, I., 387
Radiación, de los átomos, 382
Rayos gamma, 382-384
Rayos X, 382-384
  efectos Compton con, 384
  generador de, 306
Reactancia, 280
Reactancia capacitiva, 282, 286
Reactancia inductiva, 280, 286
Rectificador, 315, 316
  galvanómetro con, 300
  de media onda, 315
  de onda completa, 316
Reflexión de ondas electromagnéticas, 349-352
Refracción de ondas electromagnéticas, 349-352
Regla de la mano derecha, 132
Reglas de Kirchhoff, 174-176
Rejilla, 314
Relación de resistividades para los metales, tabla, 184
Relaciones tensión intensidad, en circuitos de corriente alterna, 278-282
Relajación, tiempo de, 164, 183, 359, 360
Relativa, permeabilidad, 235
Reluctancia, 270
  magnética, 270
Remanencia, 253
Resistencia, 161, 168
  en circuitos de corriente alterna, 278-279
  disipación de energía en, 168, 169
  interna, 169-172
    en generadores, 306
  medida de grandes, 294
  en paralelo, 166
  en serie, 165, 166
  shunt, 178
  variación de la temperatura, 183, 184
  (*Véase también* Resistividad)
Resistividad, 164
  de los metales, 182-185
  (*Véase también* Resistencia)
Resonancia, 289
  magnética, 387
Resonancia magnética, experimentos, 387
Rotor, 212

Saturación, en ferromagnetismo, 252
Secundaria, emisión, 379
Selector de velocidades, 150
Semiconductores, 319-326
  banda de conducción en, 321
  banda prohibida en, 320, 321
  banda de valencia en, 321
  electrones de conducción en, 321
  huecos en, 321
  de impurezas, 322, 326
  niveles aceptores en, 323
  niveles dadores en, 321
  tipo *n*, 322, 323
  tipo *p*, 323
Serie, circuito *RLC*, 282-287
  empleo de magnitudes complejas en el, 408, 409
Shunt, resistencia, 178
Sinusoidal, tensión, 276, 277
Sistemas conservativos, 65-68
Solenoidal, corriente superficial, 138, 231
  densidad de corriente, 138, 231
  efectiva en la materia magnetizada, 231, 267, 268
  equivalente, 267, 268
Solenoide, 137
  campo magnético de, 137, 138
    mediante el teorema de Ampere, 143
  toroidal, 143, 233
Spin del electrón, 244, 250
Statfaradio, 392
Statvoltio, 391
Stern, y Gerlach, experimento de, 385-387
Stern, O., 387
Sur, polo magnético, 264
Susceptibilidad, eléctrica, 103
  magnética, 235
    negativa, 245
    tabla, 249

Tabla de constantes físicas, 413
Tabla de conversión de unidades, 392, 394, 395
Tanque, circuitos, 318
Teorema de Ampere, 140
  forma generalizada, 331
Teorema de unicidad, 92, 400
Térmica, fuerza electromotriz, 190
Térmico, amperímetro, 299
Termoiónica, emisión, 379
Thomson, J. J., 151
Tiempo, constante, de, 291-293
Toroidal, solenoide, 143, 233
Townsend, coeficiente de, 363
Transformador, 301-304
Transistores, 319-326
  base, 323
  colector, 323
  emisor, 323
Transitorios, 290-294
Triodo, 316-318
  en circuitos, 318

Unidades, conversión de, 395, 396
electromagnéticas, 393, 394
electrostáticas, 389-392
mks, 388, 389
prácticas, 389

Valencia, banda en semiconductores, 321
Valores eficaces, en alterna, 296, 298
Válvula de vacío, 314-319
Van Allen, capa de, 373
Van der Graaf, generador de, 306
Varilla imanada, par sobre una, 264
Vector, de Poynting, 343-346, 350
unitario, 27
Vectorial, campo, 39
notación, 27, 28
producto, 130
Velocidad, de deriva, 368
de fase, 355
de grupo, 355
de las ondas electromagnéticas, 341
selector de, 150
Voltímetro, 179

Watímetro, 299-300
Weber, 138
Wheatstone, puente de, 181, 182
Wimshurst, máquina de, 306

SICS"